О логических мотивировках для изучения арифметики бесконечных кардиналов[1]

Шиян Т.А. О логических мотивировках для изучения арифметики бесконечных кардиналов // Проблеми викладання логіки та дисциплін логічного циклу: Міжнародна науково-практична конференція (15-16 травня 2008 року): Матеріали доповідей та виступів. Київ, 2008. С. 50-52.
Сохранено с сайта: http://taras-shiyan.narod.ru.
E-mail: taras_a_shiyan@mail.ru.

1. В курсах по теории множеств для логиков обычно ограничиваются изложением самых азов теории бесконечных ординалов, а арифметика кардинальных чисел обычно остается почти без внимания. При этом, имеются достаточно элементарные (хоть и не традиционные) логические задачи, для решения которых требуется бесконечная арифметика. Эти же задачи можно использовать как мотивировку и повод для изложения арифметики бесконечных кардиналов студентам-логикам. Рассмотрим эти задачи и некоторые их решения.

Обобщенными теориями Э. Мендельсон в [4, гл. 2, §12] называет теории, в языке которых снимается ограничение на мощность входящих в их алфавиты классов символов. Т.е., классы индивидных, предикатных, функциональных и т.д. символов могут быть более, чем счетными. *Языки* таких теорий также будем называть *обобщенными*.

В связи с исследованием обобщенных языков и теорий можно поставить ряд достаточно элементарных вопросов.

1) Какова мощность алфавита, если известно число классов символов и мощность каждого из этих классов?
2) Какова при тех же условиях мощность различных классов термов и формул?
3) Сколько аксиоматизаций той или иной мощности возможно для некоторой обобщенной теории, если известна мощность ее языка (класса формул)?

Вопросы эти ставятся в общем виде: каковы формулы, позволяющие вычислить ту или иную интересующую нас количественную оценку? или каковы (максимально узкие) диапазоны, в которых колеблются соответствующие оценки?

Поиск решения этих задач упирается в различные вопросы арифметики бесконечных кардиналов, а те, в свою очередь, в свойства теорий множеств (в рамках которых проводятся рассуждения). Теория Цермелло-Френкеля ZF слишком слаба для анализа бесконечных кардиналов, поскольку уже такое простое утверждение, как «Любое бесконечное множество M равномощно своему декартовому квадрату M^2» настолько сильно, что в ZF доказуема его дедуктивная эквивалентность таким мощным утверждениям как аксиома выбора (AC), принцип Цермело, принцип Цорна и др. [2, 100-101]. Таким образом, базовой теорией для решения поставленных задач будет ZFC – теория $ZF + AC$ (или любой ее дедуктивный аналог). Далее можно посмотреть, как уточняются найденные решения при принятии дополнительных постулатов: тех или иных вариантов континуум-гипотезы или противоположных им утверждений.

Для большинства используемых при решении этих задач рассуждений достаточно знания элементарных принципов бесконечной арифметики, приведенных в [1].

2. Нахождение мощностей алфавита и классов ППТ и ППФ достаточно просто, если все ППТ и ППФ конечны, что предполагается понятием обобщенной теории по Мендельсону. Более интересен и сложен третий из поставленных вопросов: о числе различных исчислений.

Пусть задан формальный язык L, содержащий $\aleph_\alpha$ формул, и задано множество операций Ω над формулами этого языка. Тогда каждое множество формул A этого языка задает аксиоматизацию некоторой формальной теории. Вопрос, сколько исчислений типа <*L*, *A*, Ω> существует при различных мощностях *A*? Конечно, при стандартной формализации (что подразумевается понятием обобщенной теории по Мендельсону) увеличение числа дескриптивных переменных или параметров не влияет на число принципиально различных аксиоматик (т.е. без учета графических вариантов формул). Но, в принципе, могут быть и другие причины несчетности языка. Поэтому, задача формулируется так, что мы отвлекаемся от каких-либо знаний о структуре алфавита и от способов формализации теорий, кроме требования конечности формул языка.

Учитывая теорему, что «для всякого бесконечного множества *M* множество всех его подмножеств мощности *n* равномощно множеству M^n всех его упорядоченных подмножеств длины *n*» [3, 23], вопрос сводится к вычислению формулы $\aleph_\alpha^{\ n}$. Когда была поставлена рассматриваемая задача, автору не удалось в доступных на тот момент учебниках и монографиях по теории множеств найти ответа на вопрос о конкретизации значения выражения «$\aleph_\alpha^{\ n}$». В результате, была доказано следующая теорема:

- если $2^n \le \aleph_\alpha$, то $\aleph_\alpha^{\ n} = \aleph_\alpha$,
- если $\aleph_\alpha < 2^n$, то $\aleph_\alpha^{\ n} = 2^n$.

Здесь интересен разбор подслучаев соотношения *n* и $\aleph_\alpha$, обобщенных теоремой. Самостоятельное доказательство студентами этих подслучаев может быть неплохой практикой в применении принципов бесконечной арифметики.

Для теории *ZFC* положение кардинала $2^{\aleph_\alpha}$ в ряду $\aleph_{\alpha+1}$, $\aleph_{\alpha+2}$, … не определено. Некоторые решения можно найти в рамках тех или иных расширений *ZFC*, например, присоединив к *ZFC* обобщенную континуум-гипотезу (*GCH*): $\forall\alpha(2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1})$. Совместимость *ZF*, *AC* и *GCH* показана Геделем [3, 39-40]. В это случае получаем следующий вариант теоремы:

- если $n < \aleph_\alpha$, то $\aleph_\alpha^{\ n} = \aleph_\alpha$,
- если $\aleph_\alpha \le n$, то $\aleph_\alpha^{\ n} = n^+$,

где n^+ – кардинал, непосредственно следующий за *n*.

Литература

1. *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М., 1977.
2. *Ершов Ю.Л.*, *Палютин Е.А*. Математическая логика. М., 1979.
3. *Йех Т.* Теория множеств и метод форсинга. М., 1973.
4. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М., 1971, 1984 и др.