

## О некоторых проблемах интерпретации логико-математической символики<sup>1</sup>

*Шиян Т.А.* О некоторых проблемах интерпретации логико-математической символики // Δόξα / Докса. Збірник наукових праць з філософії та філології. Вип. 10. Стратегії інтерпретації тексту: методи і межі їх застосування. Одеса, 2006. С. 223-230.

Сохранено с сайта: <http://taras-shiyan.narod.ru>.

E-mail: [taras\\_a\\_shiyan@mail.ru](mailto:taras_a_shiyan@mail.ru).

**1. Введение.** В современной символической логике используется и изучается целый ряд теория-подобных объектов (ТПО) – математических объектов, которые могут рассматриваться как модели или проекты теорий: исчисления, формальные теории, логические матрицы, логические модели, алгебры и т.п. В современной логике ТПО являются не только основной формой фиксации логических знаний, но и основным объектом изучения. Во второй половине XX века было показано существование (в универсуме математики) бесконечных (в том числе, более чем счетных) классов ТПО. Даже количество явно описанных в литературе ТПО каждого типа исчисляется, по крайней мере, сотнями. В результате, в современной логике возник класс задач по сравнению и систематизации объектов в рамках каждого из типов ТПО.

В течение ряда лет мне пришлось заниматься вопросами сравнения по дедуктивной силе (по множеству теорем) и систематизации формальных силлогистик (основные результаты изложены в [6; 8]), а также положены в основу информационной системы по логике [www.theo.ru](http://www.theo.ru)). Именно в ходе этой работы (формально-математической и историко-логической одновременно) был осознан тот круг проблем, рассмотрению которых посвящена настоящая статья. Этим же обуславливается тот факт, что основная часть рассматриваемых в статье примеров относится к области сравнения формальных силлогистик.

Рассматриваемые сложности связаны с трактовкой «формальной теории» как семиотического объекта особого вида: формальной теорией называется множество формул некоторого формального языка, отвечающее условию дедуктивной замкнутости (относительно некоторого фиксированного множества правил вывода). Получается, что для любой формулы принадлежать некоторой формальной теории (как множеству) и быть ее теоремой – синонимы. Таким образом, сравнение двух формальных теорий по дедуктивной силе совпадает с их сравнением по объему (то есть, с обычным теоретико-множественным сравнением двух множеств). Когда мы сравниваем теории, априорно сформулированные в одном языке, трудностей рассматриваемого ниже вида не возникает. Но, когда нам предстоит сравнивать теории, сформулированные, возможно, в разных языках, то необходимо предварительно провести сравнение этих языков. Здесь и возникают проблемы герменевтического плана, рассматриваемые в данной статье. Эта же задача сравнения формальных языков возникает и в ряде других случаев: при сравнении по дедуктивной силе большинства видов исчислений и при некоторых методиках сравнения по выразительным возможностям формальных теорий и исчислений. Возникающие при сравнении формальных языков сложности и неоднозначности связаны, как мне кажется, во-первых, с особенностями функционирования общекультурных знаков в качестве

---

<sup>1</sup> © Шиян Т.А., 2007.

математических символов и, во-вторых, с несоответствиями между формальной идеологией и реальной математической практикой.

## **2. Ограниченность формальных контекстов и проблемы их соотнесения.**

Построение формального языка начинается с выбора алфавита – множества символов, из которых будут строиться выражения нашего языка. К формальному алфавиту предъявляются следующие (в общем-то, обычные теоретико-множественные) требования.

1. Легкое различение букв алфавита друг от друга.

2. Умение рассматривать алфавит в целом и легко определять, является ли некоторый знак буквой нашего алфавита или нет.

В принципе, в качестве букв могут использоваться (и часто используются) не только одиночные символы, но и их сочетания. При этом, остается требование легкого и однозначного различения не только изолированных букв, но и букв внутри более сложных синтаксических конструкций.

Далее задается понятие слова в алфавите. Обычно слово понимается как линейная последовательность букв. При задании конкретных логических языков понятие слова, как правило, опускается, и сразу задаются конкретные классы слов – класс термов (только для предикатных языков) и класс формул (аналог повествовательных предложений в естественных языках). Понятия термина и формулы могут задаваться непосредственно или через их частные случаи. На этом описание языка заканчивается.

Использование в рассуждениях неявных предпосылок и интерпретаций запрещается формальной методологией. Таким образом, о символах и выражениях языка мы знаем (в рамках формальной методологии) только то, что подразумевается двумя указанными выше общими требованиями к формальным алфавитам, и то, что явно задано при определении языковых выражений. Но вот вопрос, каковы критерии подразумеваемого в требованиях 1 и 2 легкого и однозначного отождествления или различения символов? Поскольку лишь подразумевается наличие таких критериев, а сами они не указываются, и речь о них идет с некоторой общекультурной точки зрения, то разумно предполагать, что это те критерии различения / неразличения знаков, которыми мы пользуемся в рамках этой же общекультурной позиции.

Рассматривая общекультурные семиотические навыки, легко заметить, что критерии различения / неразличения письменных знаков зависят от конкретных контекстов. Мы грамматически различаем буквы русского языка и отличаем их строчное написание от заглавного (хотя существуют некоторые частные контексты неразличения этих начертаний). В некоторых специальных контекстах различают характеристики подчеркика, размер букв, используемые шрифты и применяемые стили оформления. В математическом дискурсе, как и в других сферах жизни, учет этих характеристик неоднозначен и непоследователен. Ограничимся поэтому грамматически значимым различением заглавного и строчного начертания букв и общесемиотическим различением остальных знаков (без учета стиля их написания).

Но так заданные критерии работают только в рамках единого формального исследования, когда заранее планируемое тождество или различие смыслов, придаваемых значкам, находит свое воплощение в использовании при построении одинаковых или разных графем. В этом случае не возникает конфликтов между выдвинутым критерием, формальными требованиями и неформально придаваемыми смыслами, поскольку по построению (по определению, априорно) задается их совпадение. Но у разных авторов одна и та же система формально и неформально задаваемых смыслов может накладываться на разные множества графем или на одно множество, но по-разному. Поэтому в общем случае при сравнении формализмов,

описанных в разных текстах, выдвинутый критерий сравнения букв формальных алфавитов не работает.

Например, два формальных алфавита (описанных в разных текстах), различающихся одним знаком («&» или «^»), мы должны признать разными алфавитами, поскольку «&» и «^» – разные, с общесемиотической точки зрения, знаки. Соответственно, мы должны различать также и сформированные на их основе формальные языки и формальные теории. Но два формальных построения, задающих, например, классическую логику высказываний, обычно не различаются, если разница между ними состоит только в начертании того или иного знака. Аналогичная ситуация возникает и с другими синонимичными обозначениями: отрицание может передаваться знаками «~» и «¬», импликация – знаками « $\supset$ » и « $\rightarrow$ », силлогистические связки – буквами «a» и «A», «i» и «I», «t» и «T» и т.п., что не мешает в математической практике отождествлять соответствующие языки и формулировки теорий. Кроме того, понимание некоторых знаков как синонимичных не мешает их различению в других случаях, поскольку сама традиция их отождествления выходит за рамки формального подхода, и в последующих дедуктивных построениях мы можем определить их как дедуктивно разные знаки.

Кроме того, что критерий общесемиотического различения графем не универсален, обычно нет (на уровне построения языка) и формальных критериев для различения традиционно различаемых знаков. Например, обычное различение знаков «^» и «v» опирается на их графическое различие (которое, как мы показали, не общезначимо) и на их дальнейшее использование в рамках дедуктивных построений как знаков для операций конъюнкции и дизъюнкции. Но в рамках формальной методологии нам ничто не мешает определить (на дедуктивном уровне) знаки «^» и «v» как тождественные.

Учитывать неформальные моменты приходится не только при сравнении семиотически разных знаков. Одна и та же графема может по-разному определяться на дедуктивном или на синтаксическом уровне, и в ряде случаев приходится использовать одну и ту же графему в разных контекстах считать разными знаками. Например, «A» в [4] используется для передачи общеутвердительной силлогистической связки, а в [3] – в качестве силлогистического термина.

Не существенность используемых обозначений для сравнения формальных построений из разных контекстов хорошо иллюстрируется следующим примером. В.А. Смирнов в [4], Л.И. Мchedlishvili в [3] и В.И. Маркин в [2] рассматривали ряд силлогистических теорий в языке с простыми общими терминами и четырьмя классическими силлогистическими связками. Хотя содержательно подразумевается, что эти теории построены в одном и том же языке, но указанные авторы использовали в своих формальных построениях разные алфавиты и несколько различный синтаксис. Так, например, общеутвердительное высказывание у Смирнова может представляться последовательностью вида «ASP», у Маркина – «SaP», а у Мchedlishvili – «AaB». Таким образом, исходя из содержательных соображений и целей исследования, мы должны «A» в «ASP» отождествить с «a» в «SaP», но различить с «A» в «AaB».

Рассмотренные примеры показывают, что, решая задачу сравнения языков, взятых из разных текстов, необходимо учитывать не только их строго формальные характеристики, но и придаваемый языковым выражениям (в рассматриваемых текстах) дедуктивный смысл, и неформально придаваемый смысл, и существующую традицию отождествления / различения тех или иных знаков. Таким образом, мы выходим здесь за пределы корректного использования формальной методологии. Перенос в текст некоторых формально полученных результатов, описанных в других текстах, основан на содержательной интерпретации используемых формализмов.

Впрочем, и привлечение содержательных соображений не всегда позволяет сделать однозначный выбор в пользу того или иного отождествления / различения.

В определенном смысле, разные формальные контексты можно сложить воедино, явно указав используемые *ad hoc* интерпретации, отождествления / различения, пресуппозиции и т.п. Хотя такая содержательная интерпретация обычно проводится *ad hoc* и не тематизируется, ее можно описать в явном виде и даже формализовать, задав отображение или отношение между сопоставляемыми формализмами, которое будет фиксировать произведенные нами отождествления и различения. При этом, результат создаваемого текста, фактически, ослабляется; от некоторого итогового результата *T* мы переходим к утверждению: если опираться на такую-то интерпретацию используемых данных, то *T*.

Хотя можно формализовать результаты *ad hoc* проведенного сравнения, общих формальных критериев такого сравнения, видимо, нет. Этот вывод в достаточной степени иллюстрируется приведенными выше примерами. Но остаются вопросы: есть ли относительно общие содержательные критерии для сравнения формальных конструкций? Можно ли избежать хотя бы части рассмотренных сложностей за счет явной фиксации подразумеваемых содержательных интерпретаций букв используемых формальных алфавитов? На второй вопрос можно ответить положительно: некоторых трудностей избежать можно, но избавиться от всех герменевтических проблем, от выбора на основе содержательных соображений и случайных факторов все равно не удастся. Рассмотрим подробнее, возникающие здесь трудности.

**3. Роль научной традиции и случайных факторов при соотнесении формальных контекстов.** Собственно, в современной логике редко формальные алфавиты задают так, как это было описано выше. Обычно, алфавит описывается как некоторый набор групп знаков. Каждая такая группа содержательно интерпретируется как множество знаков некоторого семиотического типа. То есть, фактически, задается типология знаков. Кроме этой типологической интерпретации, некоторым знакам придается еще индивидуальная интерпретация. Например, внутри группы «пропозициональные связки» все знаки обычно наделяются индивидуальной интерпретацией: «знак конъюнкции», «знак дизъюнкции» и т.п. При этом, обычно утверждается, что содержательная интерпретация, задаваемая групповыми и индивидуальными ярлыками, никак не оказывает влияния на наши формальные рассуждения. Но, как было показано в примерах предыдущего раздела, именно содержательные интерпретации, задаваемые такими ярлыками, учитываются в первую очередь при сравнении формальных построений и переносе результатов из одного контекста в другой. Кроме того, хотя осознанное использование содержательных ярлыков снимает многие трудности, возникающие при строго формальных рассуждениях, ряд проблем все равно остается. Рассмотрим их подробнее.

Понятно, что один и тот же знак формального языка можно наделять разным формальным смыслом при определении той или иной дедуктивной системы. Но вопрос, почему в одном случае для дедуктивно разных знаков используются разные графемы, а в другом – одна? Разберем несколько случаев.

В рамках одного языка (одной теории) мы должны использовать разные графемы для дедуктивно разных знаков. Если мы хотим две теории объединить в одну, то все знаки, которые в этих теориях имеют разный смысл, но передаются одной графемой, должны быть графически разделены. Так, например, пришлось поступить В.А. Смирнову в [5], поскольку примененный им метод сравнения теорий по дефинициальной выразимости подразумевает сведение сравниваемых теорий к теории в объединенном языке. Так, в [5] общеутвердительная силлогистическая связка в

фундаментальной силлогистике (где допускается пустота субъекта) и в системе С2 (силлогистика Аристотеля-Оккама, в которой субъект истинного общеутвердительного высказывания не может быть пустым) передается разными буквами, хотя во всех остальных работах Смирнова, так и в работах других авторов, эти две теории формулируются в одном и том же языке.

Задача систематического рассмотрения описанных в литературе формальных силлогистик в рамках одного текста (или серии преемственных текстов) ставит перед выбором: передавать дедуктивно разные интерпретации, например, общеутвердительной силлогистической связки разными графемами (как это сделано Смирновым в [5]) или одной графемой (как это принято в современной логической традиции). Эти два подхода логически не совместимы, поскольку невозможно два объекта отождествлять и различать одновременно и в одном и том же смысле. Я в своих исследованиях придерживался традиционного рассмотрения фундаментальной, оккамовско-аристотелевской и ряда других силлогистик как сформулированных в одном языке. Но, как очевидно, подход, реализованный в [5], также совершенно законен.

С другой стороны, хотя разные понимания общеутвердительной силлогистической связки «Все ... есть ...» принято рассматривать в рамках одного языка, сложилась традиция графического различения некоторых разных пониманий частноутвердительной связки «Некоторые ... есть ...». Аристотель в «Первой аналитике» определяет кванторное слово «некоторый» как «некоторый, а, может быть, все». Но это понимание слова «некоторый» не единственно возможное в русском языке. В начале XX века русский философ из Казани Н.А. Васильев предложил вариант силлогистики с пониманием «некоторый» как «только некоторый» (высказываются мнения, что к такому же пониманию слова «некоторый» склонялся М.В. Ломоносов и ряд других философов). Первая формальная силлогистика на основе васильевского понимания «некоторый» была предложена В.А. Смирновым. В последствии, целый ряд силлогистик васильевского типа был построен Т.П. Костюк. Начиная со Смирнова, в логике стали графически различать связку с аристотелевским пониманием «Некоторый ... есть ...» (обозначают буквами «i» или «I») и связку с васильевским пониманием (буквы «t» или «T»). По моим наблюдениям, аристотелевское понимание слова «некоторый» не является естественным для русского языка: перед объяснением соответствующей темы студенты обычно понимают «некоторый» как «только некоторый», а для ряда студентов (на моей памяти, почему-то – студенток) переход от «васильевского» к аристотелевскому пониманию сопряжен с определенными психологическими трудностями.

Возникает следующая дилемма. Если мы исходим из общей лингвистической передачи общеутвердительного высказывания «Все ... есть ...», то было бы последовательно рассуждать аналогичным образом и в случае с частноутвердительными высказываниями (сравнение ряда силлогистик с традиционным и васильевским пониманием связки «Некоторые ... есть ...» в одном языке осуществлено мной в [8]). А если мы исходим из различного смыслового (и дедуктивного) понимания частноутвердительной связки «Некоторый ... есть ...» у Аристотеля и у Васильева, то было бы последовательно поступить аналогичным образом и в случае с общеутвердительными высказываниями. В обоих случаях логики исходят скорее из сформировавшейся традиции именно такого отождествления и различения символов, чем из каких-либо теоретических соображений.

Другой сложный случай связан с интерпретацией связки «есть» Онтологии С. Лесневского. В литературе описан ряд теорий, реализующих в бескванторных предикатных языках силлогистического типа интерпретацию Лесневским связки

«есть». Поскольку эта связка обычно передается в формальных языках греческой буквой «ε» и маркируется ярлыком «связка Лесневского «есть»», то обычно ее автоматически отличают от силлогистических связок, хотя в сингулярных силлогистиках (с единичными терминами) также используется связка «есть» (при этом она обычно обозначается другими значками и маркируется как «единичноутвердительная силлогистическая связка»). Следование современной логической традиции подразумевает принятие этого различия. Оно кажется вполне естественным, поскольку за системами Лесневского прочно укрепилась репутация «экзотических».

Но если обратить внимание на статью В.А. Бочарова [1], то возникает ситуация несовместимого выбора, аналогичная случаю со статьей [5]. В [1] строится ряд сингулярных силлогистик, в том числе и в стиле Лесневского. Во всех этих системах для передачи связки «есть» использовалась одна и та же буква. Поскольку нет достаточных оснований игнорировать данную статью Бочарова, то вместо традиционного различия связки «есть» в смысле Лесневского и связки «есть» в остальных смыслах приходится выбрать передачу связки «есть» во всех случаях одним и тем же знаком. При этом, сводный граф формальных силлогистик претерпевает существенную трансформацию.

Итак, общий вывод, который приходится сделать из рассмотренных примеров, что при сравнении формальных результатов, полученных в разных текстах, приходится учитывать не только внешний вид графем (привлекать общесемиотические навыки), их формальные определения и неформально придаваемый смысл (обычно закрепляемый в ярлыке), но и существующую в научной культуре традицию отождествления / различия символов. Кроме того, приходится разбирать специальные, противоречивые случаи, создаваемые случайным фактором наличия публикаций с нетрадиционной формализацией (наличие таких формализаций вполне законно и полностью согласуется с принятием формальной методологии).

В связи с этим, видимо, можно ответить и на другой вопрос, сформулированный в конце второго раздела: есть ли относительно общие содержательные критерии для сравнения формальных конструкций? Эти критерии только что были перечислены, но формальный критерий не достаточен (что обосновывалось в настоящей статье), а все остальные – не являются ни достаточными, ни необходимыми. Автор текста всегда может принять некоторое решение (не противоречащее формальному критерию) по поводу сравнения используемых формализмов, узаконив его соответствующими относительно разумными пояснениями. Опора на научную традицию вполне обосновывает игнорирование общесемиотического сравнения и содержательных интерпретаций, а опора на содержательные интерпретации – игнорирование общесемиотического сравнения графем. Думаю, что в статье мной вскрыты далеко не все факторы, влияющие на формально-математические исследования. Более того, количество таких факторов вполне может оказаться бесконечным.

Подводя итог проведенным рассмотрениям, я бы сказал, что существует некое смысловое поле, которое мнится формально не существующим, но в которое погружен любой формализм и без учета которого адекватное семиотическое понимание реальной формально-математической деятельности невозможно.

## Литература

1. [Бочаров 1987] Бочаров В.А. Силлогистики с сингулярными терминами // Современная логика и методология науки. М., 1987.
2. [Маркин 1991] Маркин В.И. Силлогистические теории в современной логике. М., 1991.

3. [Мчедлишвили 1986] Мчедлишвили Л.И. Позитивная ассерторическая силлогистика и логика одноместных предикатов // Логика и системные методы анализа научного знания. М., 1986.
4. [Смирнов 1987] Смирнов В.А. Логические методы анализа научного знания. М., 1987.
5. [Смирнов 1994] Смирнов В.А. Дефинициальная эквивалентность систем силлогистики // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН, 1993. М., 1994.
6. [Шиян 2002] Шиян Т.А. Множество формальных силлогистик с простыми «общими» термами (структурное описание и количественный анализ) // [www.logic.ru](http://www.logic.ru). Электронный журнал «Logical Studies». №8.
7. [Шиян 2004a] Шиян Т.А. Формально-историческое исследование нескольких групп формальных силлогистик // [www.logic.ru](http://www.logic.ru). Электронный журнал «Logical Studies». №10.
8. [Шиян 2004b] Шиян Т.А. Соотношение формальных силлогистик в языке с предикаторами  $a$ ,  $e$ ,  $i$  // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке: Материалы VIII Общероссийской научной конференции. СПб., 2004.