Множество формальных силлогистик с простыми «общими» термами (структурное описание и количественный анализ)[1]

Шиян Т.А. Множество формальных силлогистик с простыми «общими» термами (структурное описание и количественный анализ) // Электронный журнал *Logical Studies*. №8 (2002). www.logic.ru.
Сохранено с сайта: http://taras-shiyan.narod.ru.
E-mail: taras_a_shiyan@mail.ru.

1. Предварительные замечания. Данная статья продолжает исследования, первые результаты которых были описаны в статье «Классификация теорий чистой позитивной силлогистики» [Шиян 2000]. Здесь приводятся ответы на некоторые возникшие ранее вопросы и подводятся некоторые итоги изучению множества силлогистик с простыми «общими» термами (чистых позитивных силлогистик).

1. В [Шиян 2000] рассматривалось 8 формальных силлогистик, в результате чего был построен граф, представляющий соотношение этих теорий по дедуктивной силе. Ряд описанных в литературе теорий (в данном языке) не попал в эту «классификацию». Некоторые из этих пропущенных теорий формулировались с использованием разных правил вывода, что сильно усложняло их сравнение. В данной работе решена задача сравнения теорий, сформулированных с использованием разных правил вывода, и приводится единый граф для всех, найденных мной в русскоязычной литературе, формальных теорий, сформулированных в рассматриваемом языке.

2. В [Шиян 2000] вводился ряд новых теорий, среди которых можно выделить два расширения C4: $C_{=}$=C4+(SiP⊃SaP) и C(2)=$C_{=}$+(SeM∧MeP⊃SaP). В [Шиян 2001] утверждалось, что системе $C_{=}$ адекватна стандартная семантика для C4 с дополнительным требованием: $\forall S\forall P(\varphi(S)\cap\varphi(P)\neq\varnothing \Rightarrow \varphi(S)=\varphi(P))$, а системе C(2) адекватна семантика для $C_{=}$ с дополнительным требованием

---

[1]

$\forall S\forall P\forall Q(\varphi(S)=\varphi(P)\vee\varphi(S)=\varphi(Q)\vee\varphi(P)=\varphi(Q))$. Здесь я привожу доказательство данных утверждений.

3. Ранее ставилась задача построения синтаксически полного расширения C4. В данной работе я строю такую теорию $C_{(1)}$, доказываю ее синтаксические непротиворечивость и полноту, а также взаимную погружаемость $C_{(1)}$ и одного варианта классической логики высказываний.

4. В [Шиян 2002, С. 32] предложена идея построения счетного класса расширений $C_{=}$. в настоящей статье описывается построение этого класса теорий и строятся адекватные этим теориям семантики.

2. Язык формальных силлогистик с простыми «общими» термами; формальные теории и принципы их систематизации

Язык рассматриваемых теорий имеет следующий **словарь**:

a) логические константы: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\equiv$;
b) двухместные предикаторы: a, e, i, o (понимаемые как силлогистические константы);
c) бесконечный список постоянных термов (параметров): S, P, M, S_1; P_1, M_1, … (понимаемых как силлогистические термины);
d) круглые скобки.

Высказывания:

a) выражения типа $\alpha_1*\alpha_2$, где α_1 и α_2 – некоторые термы и * – некоторая силлогистическая константа;
b) выражения, правильно построенные из других высказываний посредством логических констант.

Элементарными буду называть высказывания, соответствующие пункту a), и, в зависимости от использованной константы, буду говорить о них как о высказываниях типа A, I, E, O.

Разные авторы для формулировки одних и тех же теорий используют более или менее различающиеся между собой языки: используются разные значки конъюнкции («&» и «$\wedge$»), разные буквы для терминов[2], для силлогистических констант[3], по-разному записываются элементарные силлогистические

[2] S, P, M, S_1; P_1, M_1,… (Смирнов, Маркин); s, p, m, s_1; p_1, m_1,… [Бочаров 1984]; A, B,... [Мчедлишвили 1986]; a, b, c, d,... [Попов 1997].

[3] A, E, I, O (Смирнов, Бочаров); a, e, i, o (Маркин).

высказывания[4]. Безусловно, все это разные алфавиты и языки, с точки зрения современного семиотического сознания. Но различия эти чисто графические, и мы можем отождествить соответствующие друг другу значки и выражения (как мы отождествляем буквы, не обращая внимания на особенности шрифта или подчерка). Собственно, в современной математике достаточно распространена подобная практика и существует даже специальный значок (графически равно) для подобных отождествлений. В принципе, мы можем нашу отождествляющую деятельность формально оформить в виде некоторой функции отождествления (например, ε). В этом случае, мы можем явно говорить, что рассматриваем теории, сформулированные в одном относительно функции ε языке. Я буду иметь в виду именно это.

Далее я буду рассматривать не конкретные исчисления, а задаваемые ими формальные теории. Это дает нам инвариантность относительно того или иного способа формализации теории (но не инвариантность относительно языка формализации). Под формальной теорией, вслед за Тарским [Tarski 1956], понимают дедуктивно замкнутое множество формул[5]. Мне для дальнейшей работы достаточно понимания, что формальная теория – множество теорем, задаваемое некоторым исчислением (формальной системой). Конкретные исчисления, таким образом, будут использоваться лишь для выделения того или иного множества формул (теорем).

Раз формальные теории – множества, то между ними можно установить обычные теоретико-множественные отношения: $\subseteq$, $\subset$, $=$. А поскольку формальная теория есть множество теорем, то эти отношения соответствуют соотношению теорий по дедуктивной силе. Таким образом, множество формальных теорий естественно упорядочивается отношением $\subseteq$ ($\subset$).

Большинство известных теорий задается с помощью тех или иных исчислений. Здесь возникают некоторые технические

[4] Например, ASP, ESP, ISP, OSP (Смирнов) и SaP, SeP, SiP, SoP (Маркин).

[5] Множество формул некоторого формального языка, замкнутое относительно некоторых правил вывода. Минимальным требованием выдвигают обычно замкнутость относительно стандартных правил подстановки. Варьируя правила вывода и постулаты о наличии в множестве тех или иных формул (аксиомы и схемы аксиом), получаем различные замкнутые классы формул (формальные теории).

трудности при сравнении теорий, сформулированных с помощью разных правил вывода. В ряде случаев сравнение по дедуктивной силе можно существенно упростить применением «косвенных» методов сравнения. Одним из таких способов является применение погружающих операций.

Df.2.1. Функция η, сопоставляющая[6] каждой формуле языка L_1 некоторую формулу языка L_2[7], погружает теорию T_1 (в языке L_1) в T_2 (в языке L_2) е.т.е. для всякой формулы A языка L_1 верно, что $\vdash_{T1} A \Leftrightarrow \vdash_{T2} \eta(A)$.

Лемма 2.1 (о равенстве двух теорий). Пусть T_1 и T_3 сформулированы в L_1, T_2 сформулирована в L_2, и η погружает в T_2 как T_1, так и T_3. Иначе говоря, для всякой формулы A языка L_1 верно, что $\vdash_{T1} A \Leftrightarrow \vdash_{T2} \eta(A)$ и $\vdash_{T3} A \Leftrightarrow \vdash_{T2} \eta(A)$. Отсюда получаем, что для всякой формулы A языка L_1 верно $\vdash_{T1} A \Leftrightarrow \vdash_{T3} A$, т.е. $T_1=T_3$.

Частным случаем этого метода является сравнение через построение семантики. Здесь в качестве погружающей операции выступает функция приписывания значений формулам языка. Семантическая адекватность (непротиворечивость и полнота) теории T относительно семантики M означает, что множество доказуемых в T формул равно множеству формул, общезначимых в M (T=M).

Лемма 2.2 (о равенстве двух теорий). Пусть T_1 и T_2 сформулированы в одном языке и имеют одну и ту же адекватную семантику M. Иначе говоря, T_1=M и T_2=M, следовательно, $T_1=T_2$.

Формальный языком можно отождестить с множеством правильно построенных формул (ППФ). В таком случае язык совпадает по объему с противоречивой теорией, сформулированной в этом языке. Обозначу такую теорию как $C_\perp$.

---

[6] Здесь и далее имеются в виду только функции, следующие при сопоставлении формул соответствующим индуктивным определениям выражений.

[7] L_1 и L_2 могут и совпадать.

Выберем некоторую формулировку классической логики высказываний (КЛВ) со схемами аксиом или натурального типа (единственное требование – наличие правила modus ponens) и добавим к ней правило подстановки для термов. Эту теорию обозначу как $C_\varnothing$.

Все остальные системы получаются присоединением к $C_\varnothing$ тех или иных аксиом или схем аксиом[8]. Факт присоединения к системе T аксиомы (или аксиомной схемы) A буду обозначать T+A.

Множество конечно аксиоматизируемых теорий, сформулированных в одном языке на базе классической логики высказываний, относительно выбранного нами порядка образует булеву решетку с нулем $C_\varnothing$ и единицей $C_\perp$.

Для представления соотношения теорий по дедуктивной силе удобно применять «язык» графов. Вершины графа соответствуют формальным теориям, связи соединяют ближайшие теории, сравнимые по заданному порядку. Направление связей показывается стрелками или (более удобно для восприятия) расположением теорий на схеме по высоте, например, более слабые теории – ниже, более сильные – выше.

3. Обзор и структурная систематизация формальных силлогистик с простыми «общими» термами

К настоящему времени в литературе описано несколько десятков силлогистических теорий и далеко не всегда очевидно их соотношение друг с другом. Кроме того, иногда в работах даже одного автора одним и тем же знаком обозначаются разные теории или, наоборот, одна и та же теория обозначается по-разному[9]. Таким образом, обзор и систематизация построенных теорий является насущной задачей для более эффективной ориентации в материале и интенсификации дальнейших исследований.

В [Шиян 2000] рассматривались восемь теорий, описанных В.И. Маркиным в [Маркин 1991]. Это формализации чистых

---

[8] В случае схем аксиом правило подстановки не нужно.

[9] Например, у В.И. Маркина: «ОФС» (обобщенная фундаментальная силлогистики) в работах [Маркин 1991] и [Маркин 1998] обозначает совершенно разные теории; наоборот, считавшиеся в [Маркин 1991] разными системы С3.1 и С3$^+$ впоследствии оказались одной и той же формальной теорией (доказательство см. ниже).

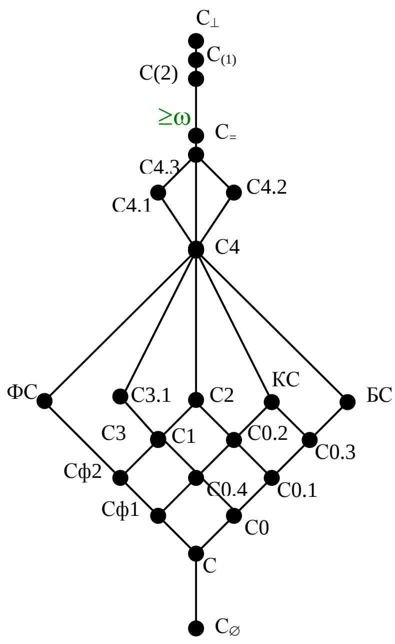
позитивных фрагментов логик Аристотеля (С2), Больцано (БС), Кэрролла (КС), фундаментальной (ФС) и традиционной (С4) силлогистик, а также теории С1, С3 и С3.1 (=С3$^+$ [Мчедлишвили 1986, Маркин 1998]). В таблице внизу указано какие аксиомы надо добавить к $C_\varnothing$ для получения той или иной из этих теорий. Знак “+” в таблице означает, что формула данной строки является аксиомой указанной в столбце системы; “$\vdash$” – что формула не является аксиомой, но доказуема в данной системе; “–” – что формула не является теоремой.

Таблица 1.

N	**Аксиомы**	**С1**	**С2**	**КС**	**БС**	**С3**	**С3.1**	**ФС**	**С4**
1	$(SaM \wedge MaP) \supset SaP$	+	+	+	+	+	+	+	+
2	$(SaM \wedge MeP) \supset SeP$	+	+	+	+	+	+	+	+
3	$SiP \supset PiS$	+	+	+	+	+	+	+	+
4	$SaP \supset SiP$	+	+	+	+	+	+	–	+
5	$SiP \supset SiS$	–	+	+	+	$\vdash$	$\vdash$	+	$\vdash$
6	$SiS \supset SaS$	–	+	+	+	–	–	+	+
7	$SaP \supset (SaS \wedge PaP)$	–	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$	–	+	$\vdash$	$\vdash$
8	$SoP \supset SiS$	–	–	$\vdash$	$\vdash$	+	$\vdash$	+	+
9	$SeP \supset SaS$	–	–	–	$\vdash$	–	+	+	$\vdash$
10	$SeP \equiv \neg SiP$	+	+	+	–	+	+	+	+
11	$SeP \equiv \neg SiP \wedge SiS$	–	–	–	+	$\vdash$	$\vdash$	–	$\vdash$
12	$SoP \equiv \neg SaP$	+	+	–	–	+	+	+	+
13	$SoP \equiv \neg SaP \wedge SiS$	–	–	+	+	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$

На основании исследований был построен граф теорий (см. граф 1). Знак «ω» около одной из связей означает, что на этом промежутке находится как минимум счетное множество формальных теорий. При построении графа был сформулирован ряд новых формальных теорий.

1. Подтеории систем из таблицы 1. Мотивом для формулировки этих теорий был поиск точных нижних граней



Граф 1. Чистые позитивные силлогистики.

для множеств теорий из табл. 1. В статье [Шиян 2000] и графе 1 приведены наибольшие из найденных общих подтеорий. Кроме того, на графе приведены три теории, отмечавшиеся, но не описывавшиеся в [Шиян 2000]: С0.4, Сф1 и Сф2. Теория $C = C_{\varnothing} + SiP \supset PiS + (SaM \wedge MeP) \supset SeP + (SaM \wedge MaP) \supset SaP + SeP \supset \neg SiP + \neg SiP \wedge SiS \supset SeP + SoP \supset \neg SaP + \neg SaP \wedge SiS \supset SoP$. Остальные теории этой группы задаются присоединением к С следующих аксиом.

Таблица 2.

N	Аксиомы	Сф1	Сф2	ФС	С0	С0.1	С0.2	С0.3	С0.4	С1	С2	КС	БС
1	$SaP \supset SiP$	–	–	–	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	$SiP \supset SiS$	–	–	+	–	+	+	+	–	–	+	+	+
3	$SiS \supset SaS$	–	–	+	–	+	+	+	–	–	+	+	+
4	$SoP \supset SiS$	–	–	+	–	–	–	+	–	–	–	+	+
5	$SeP \supset SaS$	–	–	+	–	–	–	–	–	–	–	–	+
6	$\neg SiP \wedge \neg SiS \supset SeP$	+	+	+	–	–	+	–	+	+	+	+	–
7	$\neg SaP \wedge \neg SiS \supset SoP$	–	+	+	–	–	–	–	–	+	+	–	–

Теории С4.1-С4.3. $C4.1=(C4 + SaP \supset PaS)$, $C4.2=(C4 + MiP \wedge SiM \supset SiP)$, $C4.3=(C4 + SaP \supset PaS + SiM \wedge MiP \supset SiP)$. Эти теории характерны тем, что в первой предикатор “a”, во второй предикатор “i”, а в третьей оба предикатора выражают некоторые отношения эквивалентности, связанных законом подчинения ($SaP \supset SiP$). Правда, это не чистые отношения, так как в С4.1-С4.3 присутствует не выводимая из других аксиомы 2 (табл. 1). Эти теории снова появляются при попытках сформулировать теорию, в которой предикат «a» представлял бы отношение нестрогого порядка.

Теория $C_{=}$ и ее расширения. $C_{=}$ – наиболее интересная из вновь описанных в [Шиян 2000] теорий. $C_{=}$ получается из С4 добавлением $SiP \supset SaP$ и представляет собой вариант теории эквивалентности. Предикаты a и i выражают эквивалентные друг другу отношения эквивалентности ($SaP \equiv SiP$), e и o – их отрицания ($SeP \equiv SoP \equiv \neg SaP \equiv \neg SiP$) Доказательство см. в [Шиян 2000]. $C_{=}$ адекватна семантике для С4 с дополнительным семантическим условием $\forall S \forall P(\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \varnothing \Rightarrow \varphi(S)=\varphi(P))$[10], что будет показано ниже.

[10] φ( ) – функция приписывания значений термам языка. Подробней см. ниже.

Теория $С_=$ имеет по крайней мере счетный класс расширений, что также будет показано в данной работе (идея построения этого класса была описана в [Шиян 2002, С. 32]).

Из расширений $С_=$ ранее описывалась теория С(2) [Шиян 2000]. Она получается из $С_=$ добавлением аксиомы $SeM \wedge MeP \supset SaP$ и адекватна семантике для $С_=$ с дополнительным условием $\forall S \forall P \forall Q(\varphi(S)=\varphi(P) \vee \varphi(S)=\varphi(Q) \vee \varphi(P)=\varphi(Q))$ (доказательство см. ниже).

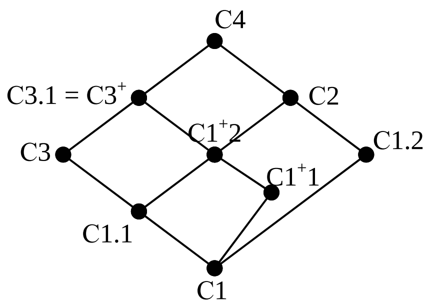
Силлогистики аристотелевского типа. В литературе описан еще ряд расширений С1 (так называемых теорий аристотелевского типа). Кроме упомянутых выше (С1, С2, С3, С3.1 и С4) это две теории $С1^+$ [Мчедлишвили 1986, Маркин 1991] и две безымянные подтеории С2, упоминавшиеся, например, в [Смирнов 1994].

Теория $С1+SiP \supset SiS$, по мнению Смирнова, в каком-то смысле эквивалентна построенной им теории CVA, формализующей силлогистику Н.А. Васильева при акцидентальной трактовке категорических суждений [Смирнов 1994, С. 13]. Обозначу эту теорию С1.1.

Вторую теорию: $С1+SiS \supset SaS$, – обозначу С1.2. Она (как и С2) обладает одним интересным свойством: С1.2 полна относительно формул вида $\sim S*S$[11]. Для каждого терма могут быть истинными только четыре формулы указанного вида (по одной на каждый предикат). В С1.2 и С2 ни одна формула указанного вида не является теоремой, но истинность (ложность) одной из них детерминирует истинность (ложность) остальных.

Теперь можно построить граф силлогистик аристотелевского типа.

В таблице 3 указано какие аксиомы и правила вывода нужно присоединить к С1, чтобы получить ту или иную теорию из графа 2. Теории $С1^+$: 1 – [Мчедлишвили 1986, Смирнов 1987/2002], 2 – [Маркин 1991, 1998].



Граф 2. Силлогистики аристотелевского типа.

[11] * – один из предикаторов теории (силлогистических констант), ~А означает А или ¬А.

Таблица 3.

N	Аксиомы	C1	C1.1	$C1^+$ 1	$C1^+$ 2	C3	C3.1 = $C3^+$	C1.2	C2	C4
1	$SiP \supset SiS$	–	+	–	+	|–	|–	–	+	|–
2	$SiS \supset SaS$	–	–	–	–	–	–	+	+	+
3	$SaP \supset (SaS \wedge PaP)$	–	–	+	+	–	+	–	|–	|–
4	$SeP \supset SaS$	–	–	–	–	–	+	–	–	|–
5	$(SeP\wedge PiP\wedge PoP)\supset SeS$	–	–	–	+	–	|–	|–	|–	|–
6	SiS	–	–	–	–	+	|–	–	–	+

Как видно из таблицы, обе теории $C1^+$ являются подтеориями C2.

В [Маркин 1991] заданы два исчисления с дополнительными правилами вывода: $C1^+$ и $C3^+$. Опираясь на лемму 2.1 нетрудно показать, что $C3^+$ совпадает с теорией C3.1 из той же работы, а дополнительное правило в формулировке $C1^+$ не расширяет множества доказуемых формул и может быть выкинуто ($C1^+$[Маркин 1991] примет вид $C1^+2$ из таблицы 3).

Смирновым были предложены два перевода силлогистических формул в язык логики предикатов (достаточно взять классическую логику одноместных предикатов – КЛОП^1).

$\eta_1(SaP) = \forall x(S(x)\supset P(x))\wedge\exists xS(x)\wedge\exists x\neg P(x)$;
$\eta_1(SiP) = \exists x(S(x)\wedge P(x))$;
$\eta_1(SeP) = \forall x(S(x)\supset P(x))$;
$\eta_1(SoP) = \exists x(S(x)\wedge P(x))\vee\neg\exists xS(x)\vee\neg\exists x\neg P(x)$;
$\eta_2(SaP) = \forall x(S(x)\supset P(x))\wedge\exists xS(x)\wedge\exists x\neg P(x)$;
$\eta_2(SiP) = \exists x(S(x)\wedge P(x))\vee\neg\exists xS(x)\vee\neg\exists xP(x)$;
$\eta_2(SeP) = \forall x(S(x)\supset P(x))\wedge\exists xS(x)\wedge\exists xP(x)$;
$\eta_2(SoP) = \exists x(S(x)\wedge P(x))\vee\neg\exists xS(x)\vee\neg\exists x\neg P(x)$;
(для пропозициональных связок переводы определяются стандартно).

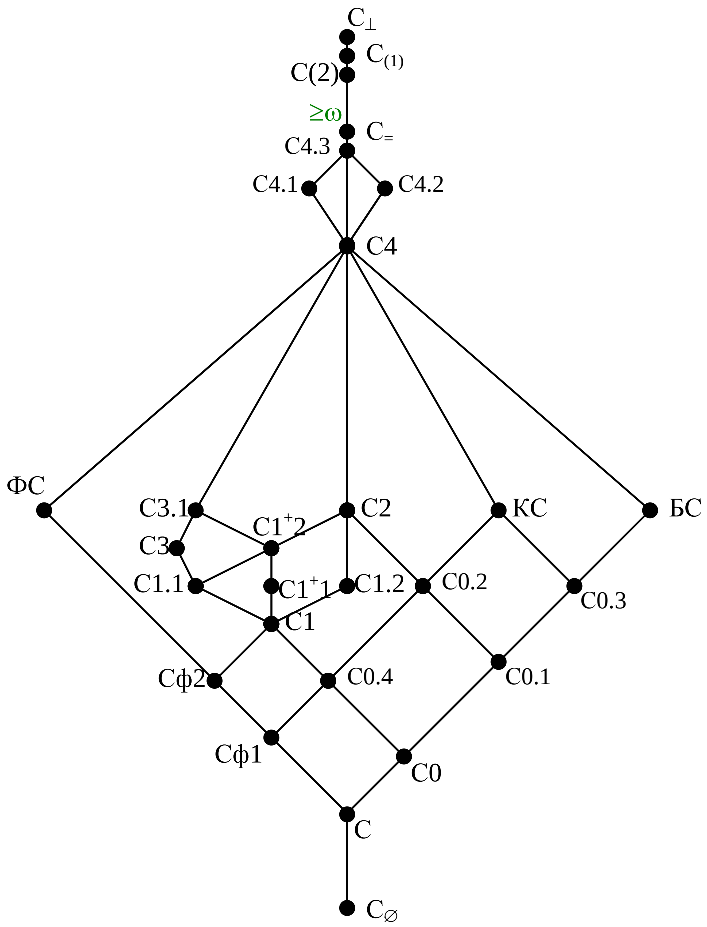
В [Маркин 1991] было показано, что η_1 погружает $C1^+$ [Маркин 1991] в КЛОП^1, а η_2 погружает в КЛОП^1 $C3^+$ [Маркин 1991]. В [Маркин 1998] были сформулированы теории $C1^+$ и $C3^+$ без дополнительных правил вывода: вторая $C1^+$ из таблицы 3 и

$C3^+$=С3.1. Там же доказывалось, что $C1^+$ [Маркин 1998] погружается в КЛОП[1] функцией η_1, а $C3^+$ [Маркин 1998] погружается в КЛОП[1] функцией η_2.

Из этих теорем (теоремы 17 и 20 в [Маркин 1991] и теоремы 2 и 4 в [Маркин 1998]) и леммы 2.1 получаем, что $C1^+$ [Маркин 1991] = $C1^+$ [Маркин 1998] и $C3^+$ [Маркин 1991] = $C3^+$ [Маркин 1998] = С3.1 [Маркин 1991].

Эквивалентность использованной мной формулировки ФС (эквивалентна формулировке ФС в [Маркин 1991]) и формулировки ФС с дополнительным правилом вывода [Маркин 1986] будет показано ниже. Существуют также формулировки с эктетическими правилами теорий С2 [Бочаров 86] и С4 [Мчедлишвили 1999].

Соединяя графы 1 и 2 получаем граф 3.



Граф 3. Чистые позитивные силлогистики.

4. Семантика для ФС и дедуктивная эквивалентность двух формулировок ФС

Семантика для ФС мне понадобится дальше в качестве основы для семантик адекватных системам $C_=$, C(2) и $C_{(1)}$. Сформулирую ее несколько раньше, чтобы использовать в доказательстве дедуктивной эквивалентности двух формулировок ФС. Выше я задавал ФС тем же способом, что и в [Маркин 1991]. Разница в нескольких аксиомах, но эквивалентность этой замены легко показать. Сложнее показать эквивалентность этих формулировок и формулировки, данной в [Маркин 1986], т.к. там использовалось дополнительное правило вывода эктетического типа. Показать дедуктивную эквивалентность этих формулировок можно способом, похожим на примененный выше для теорий $C1^+$ и $C3^+$. Разница состоит в том, что в качестве погружающей функции здесь будет использоваться функция приписывания значений формулам языка.

В [Маркин 1991] построена следующая семантика для ФС и доказана ее адекватность [Маркин 1991, с. 20-25]. Моделью является упорядоченная пара $\langle D, \varphi \rangle$, где D – произвольное непустое множество и φ – функция, сопоставляющая постоянным термам языка (силлогистическим терминам) подмножества D. Функция $|\ |\varphi^D$ (или $|\ |$ – при фиксированной модели) приписывает формулам языка истинностные значения на множестве {0, 1}. Истинность в модели определяется так:

$|SaP|=1 \Leftrightarrow \varphi(S)\subseteq\varphi(P)$,

$|SiP|=1 \Leftrightarrow \varphi(S)\cap\varphi(P)\neq\varnothing$,

$|SeP|=1 \Leftrightarrow \varphi(S)\cap\varphi(P)=\varnothing$,

$|SoP|=1 \Leftrightarrow \varphi(S)\backslash\varphi(P)\neq\varnothing$,

$|\neg A|=1 \Leftrightarrow |A|=0$,

$|A\wedge B|=1 \Leftrightarrow |A|=1\ \&\ |B|=1$,

$|A\vee B|=1 \Leftrightarrow |A|=1 \vee |B|=1$,

$|A\supset B|=1 \Leftrightarrow |A|=0 \vee |B|=1$,

$|A\equiv B|=1 \Leftrightarrow |A\supset B|=1\ \&\ |B\supset A|=1$.

Формула A общезначима е.т.е. она истинна в любой модели указанного типа (буду обозначать: $M_{ФС} \models A$).

Семантика предложенная для ФС в [Маркин 1986] отличается от этой только условием для O:

$|SoP|=1 \Leftrightarrow \varphi(S)\cap(D\backslash\varphi(P))\neq\varnothing$.

Легко показать эквивалентность этих формулировок:

$\varphi(S)\cap(D\backslash\varphi(P))\neq\varnothing \Leftrightarrow \varphi(S)\cap(D\cap\varphi(P)')\neq\varnothing \Leftrightarrow (\varphi(S)\cap\varphi(P)')\cap D\neq\varnothing \Leftrightarrow (\varphi(S)\backslash\varphi(P))\cap D\neq\varnothing$

Но $\varphi(S)\backslash\varphi(P)\subseteq D$ и $D\neq\varnothing$, следовательно, $(\varphi(S)\backslash\varphi(P))\cap D\neq\varnothing \Leftrightarrow \varphi(S)\backslash\varphi(P)\neq\varnothing$. Отсюда $\varphi(S)\cap(D\backslash\varphi(P))\neq\varnothing \Leftrightarrow \varphi(S)\backslash\varphi(P)\neq\varnothing$.

Следовательно, мы имеем эквивалентные формулировки одной и той же семантики, выделяющие одно и то же множество общезначимых формул. Обозначу его $M_{ФС}$. Множество формул, задаваемое формулировкой ФС в [Маркин 1991] (и формулировкой в данной статье), обозначу ФС(1), а множество формул, задаваемое формулировкой ФС в [Маркин 1986], обозначу ФС(2).

1. Теория ФС(1) адекватна предложенной семантике [Маркин 1991, с. 20-25], т.е. ФС(1)=$M_{ФС}$.
2. Теория ФС(2) адекватна предложенной семантике [Маркин 1986, с. 92], т.е. ФС(2)=$M_{ФС}$.
3. ФС(1)= ФС(2) – из 1 и 2.

Т.е. формулировки ФС в [Маркин 1986] и [Маркин 1991] задают одну и ту же формальную теорию.

Отличие семантики для ФС от традиционной семантики для С2 и С4 состоит в трактовке высказываний типа A и O, но при непустоте терминов (стандартного условия для С4) очевидно, что

$\varphi(S)\subseteq\varphi(P) \Leftrightarrow (\varphi(S)\subseteq\varphi(P)\ \&\ \varphi(S)\neq\varnothing)$ (для A),

$\varphi(S)\backslash\varphi(P)\neq\varnothing \Leftrightarrow (\varphi(S)\backslash\varphi(P)\neq\varnothing \vee \varphi(S)=\varnothing)$ (для O).

Требование неуниверсальности терминов традиционной силлогистики начинает работать при переходе к негативной силлогистике и для С4 может быть опущено.

5. Теория $C_{(1)}$, ее синтаксические непротиворечивость и полнота

В ходе работ по подготовке графа, описанного в [Шиян 2000] (его дополненный вариант – граф 1), возник вопрос о синтаксически полном расширении С4. Ни теория $C_=$, ни С(2) не являются синтаксически полными. В результате поисков была сформулирована теория $C_{(1)}$, получающаяся из $C_=$ добавлением аксиомы SaP[12]. Покажу синтаксические непротиворечивость и полноту $C_{(1)}$, доказательство будет проводиться методом погружающих операций.

[12] На самом деле SaP – очень сильная формула и ее принятие делает зависимыми многие аксиомы. Так, для получения $C_{(1)}$ достаточно, кроме SaP, иметь аксиомы: $SaP\supset SiP$, $SaP\supset\neg SoP$, $SaP\supset\neg SeP$.

Рассмотрим теорию TF, формализующую КЛВ (классическую логику высказываний) в алфавите $\{t, f; \neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv\}$. Теорию естественно задать, добавив к произвольному классическому пропозициональному исчислению (натуральному, со схемами аксиом или секвенциальному) утверждений $\vdash_{TF}$ t и $\vdash_{TF}$ $(t\equiv\neg f)$ (в виде аксиом, схем аксиом или правил вывода).

Непротиворечивость TF очевидна. Возьмем некоторую формулировку КЛВ в обычном пропозициональном языке. Расширим язык пропозициональными символами t и f. Определим t как сокращение для $(p\vee\neg p)$ и f как сокращение для $(p\wedge\neg p)$. Полученная теория синтаксически непротиворечива. Формулы t, $\neg f$ и $(t\equiv\neg f)$ доказуемы в получившемся исчислении и тождественно истинны в классической семантике. Множество теорем этой теории, не содержащих других пропозициональных символов кроме t и f, совпадает с теорией TF.

В дальнейшем мне потребуются утверждения:

a) теория TF – синтаксически непротиворечива;

b) $\vdash_{TF}$ t, $\neg f$;

c) $\forall A \in L(TF)$[13] $(\vdash_{TF} A \vee \vdash_{TF} \neg A)$.

Последнее утверждение вытекает из утверждения b) леммы 5.1. Пусть T – теория, построенная на базе классической логики высказываний в языке без кванторов, и для всякой атомарной формулы языка этой теории верно, что либо она сама, либо ее отрицание доказуемы в T. Тогда верно следующее утверждение.

Лемма 5.1. $\forall A \in L(T)$ $(\vdash A \vee \vdash \neg A)$.

1. Если A – атомарная формула, то утверждение леммы верно по условию.
2. Допустим, что утверждение леммы верно для B и C.
3. A – формула вида $\neg B$:
   1. $\vdash B \vee \vdash \neg B$ – по индуктивному предположению;
   2. $B\equiv\neg\neg B$ – закон КЛВ;
   3. $\vdash \neg\neg B \vee \vdash \neg B$ – из 3.1 и 3.2.
4. A – формула вида $B\wedge C$:
   1. $\vdash B$ & $\vdash C$ – предположение;
   2. $\vdash B\wedge C$ – из 4.1;
   3. $\vdash \neg B \vee \vdash \neg C$ – предположение;

[13] Здесь и далее: если ***T*** – некоторая формальная теория, то L(***T***) – язык этой теории.

4. $|\!-\neg B \vee \neg C$ – из 4.3;
5. $|\!-\neg(B\wedge C)$ – из 4.4;
6. $|\!- B\wedge C \vee |\!-\neg(B\wedge C)$ – из 4.2, 4.5 и закона искл. 3-го.

5. A – формула вида $B\vee C$:
   1. $|\!- B \vee |\!- C$ – предположение;
   2. $|\!- B\vee C$ – из 5.1;
   3. $|\!-\neg B \;\&\; |\!-\neg C$ – предположение;
   4. $|\!-\neg B \wedge \neg C$ – из 5.3;
   5. $|\!-\neg(B\vee C)$ – из 5.4;
   6. $|\!- B\vee C \vee |\!-\neg(B\vee C)$ – из 4.2 и 4.5.
6. A – формула вида $B\supset C$ – доказывается аналогично.
7. A – формула вида $B\equiv C$ – доказывается аналогично.
8. Индукцией по пунктам определения ППФ показано, что $|\!- A \vee |\!-\neg A$ для любой ППФ языка теории T.

Построим перевод ψ из $L(C_{(1)})$ в $L(TF)$:

1) $\psi(SaP) = t$, для любых S и P;
2) $\psi(SiP) = t$, для любых S и P;
3) $\psi(SoP) = f$, для любых S и P;
4) $\psi(SeP) = f$, для любых S и P;
5) $\psi(\neg A) = \neg\psi(A)$;
6) $\psi(A*B) = \psi(A)*\psi(B)$, где * – 2-х местная пропозициональная связка.

Покажу теперь, что функция ψ является погружающей операцией, т.е. $\forall A(|\!-_{C(1)} A \Leftrightarrow |\!-_{TF} \psi(A))$.

Лемма 5.2. $\forall A(|\!-_{C(1)} A \Leftrightarrow |\!-_{TF} \psi(A))$.

1. $|\!-_{C(1)}$ SaP, SiP, $\neg$SoP, $\neg$SeP (следует из определения $C_{(1)}$ и свойств $C_{=}$);
2. если A – элементарная силлогистическая формула, то лемма очевидна из 1, пунктов 1-4 определения ψ и утверждения b);
3. пусть утверждение леммы доказано для формул B и C;
4. $|\!-_{C(1)} \neg B \Leftrightarrow \sim(|\!-_{C(1)} B) \Leftrightarrow \sim(|\!-_{TF} \psi(B)) \Leftrightarrow |\!-_{TF} \neg\psi(B) \Leftrightarrow |\!-_{TF} \psi(\neg B)$;
5. $|\!-_{C(1)} B\wedge C \Leftrightarrow |\!-_{C(1)} B \;\&\; |\!-_{C(1)} C \Leftrightarrow |\!-_{TF} \psi(B) \;\&\; |\!-_{TF} \psi(C) \Leftrightarrow |\!-_{TF} \psi(B)\wedge\psi(C) \Leftrightarrow |\!-_{TF} \psi(B\wedge C)$;

6. $\vdash_{C(1)}$ B∨C ⇔ $\vdash_{C(1)}$ ¬(¬B∧¬C) ⇔ $\vdash_{TF}$ ψ(¬(¬B∧¬C)) ⇔ $\vdash_{TF}$ ¬ψ(¬B∧¬C) ⇔ $\vdash_{TF}$ ¬(ψ(¬B)∧ψ(¬C)) ⇔ $\vdash_{TF}$ ¬(¬ψ(B)∧¬ψ(C)) ⇔ $\vdash_{TF}$ ψ(B)∨ψ(C) ⇔ $\vdash_{TF}$ ψ(B∨C);
7. $\vdash_{C(1)}$ B⊃C ⇔ $\vdash_{C(1)}$ ¬B∨C ⇔ $\vdash_{TF}$ ψ(¬B∨C) ⇔ $\vdash_{TF}$ ψ(¬B)∨ψ(C) ⇔ $\vdash_{TF}$ ¬ψ(B)∨ψ(C) ⇔ $\vdash_{TF}$ ψ(B)⊃ψ(C) ⇔ $\vdash_{TF}$ ψ(B⊃C);
8. $\vdash_{C(1)}$ B≡C ⇔ $\vdash_{TF}$ψ(B≡C) – доказывается аналогично, используя соответствие B≡C ⇔ (B⊃C ∧ C⊃B);
9. индукцией по пунктам определения ППФ показано, что $\vdash_{C(1)}$ A ⇔ $\vdash_{TF}$ ψ(A) для любой ППФ языка теории $C_{(1)}$.

Теорема 5.1. Теория $C_{(1)}$ равнонепротиворечива с TF.

Равнонепротиворечивость $C_{(1)}$ и TF следует из погружаемости $C_{(1)}$ в TF: если $C_{(1)}$ – противоречива и существует такая формула A, что $\vdash_{C(1)}$ A и $\vdash_{C(1)}$ ¬A, то, по лемме 5.2, получаем, что $\vdash_{TF}$ ψ(A) и $\vdash_{TF}$ ψ(¬A). Отсюда: $\vdash_{TF}$ ψ(A) и $\vdash_{TF}$ ¬ψ(A), – следовательно, теория TF противоречива. По контрпозиции получаем, что если TF непротиворечива, то не противоречива и $C_{(1)}$.

Теорема 5.2. Теория $C_{(1)}$ – синтаксически непротиворечива. Это следует из теоремы 5.1 и утверждения а).

Теорема 5.3. Теория $C_{(1)}$ – синтаксически полна.

Теория T синтаксически полна е.т.е. T – синтаксически непротиворечива и ∀A(A∉T ⇒ (T+A – синтаксически противоречива)).

1. Все формулы вида SaP, SiP, ¬SoP, ¬SeP являются теоремами $C_{(1)}$;
2. для всякой формулы верно, что либо она сама, либо ее отрицание доказуемо в $C_{(1)}$ – из 1, лемма 5.1;
3. ~($\vdash_{C(1)}$ A) – предположение;
4. $C_{(1)}$+A |– A – по построению ($C_{(1)}$+A);
5. $C_{(1)}$ |– ¬A – из 2, 3;
6. $C_{(1)}$+A |– ¬A – из 5, по построению ($C_{(1)}$+A);
7. ($C_{(1)}$+A – синтаксически противоречива) – из 4, 6;
8. (A∉$C_{(1)}$ ⇒ ($C_{(1)}$+A – синтаксически противоречива)) – из 7, введение импликации; шаги 3-7 исключены;
9. ∀A(A∉$C_{(1)}$ ⇒ ($C_{(1)}$+A – синтаксически противоречива)) – из 8, введение квантора общности;
10. ($C_{(1)}$ – синтаксически непротиворечива) – теорема 5.2;

11. ($C_{(1)}$ – синтаксически полна) – из 9, 10 и определения синтаксической полноты.

Очевидно, что TF также синтаксически полна.

Теорема 5.4. Теории $C_{(1)}$ и TF – взаимно погружаемы. Утверждение теоремы следует из лемм 5.2 и 5.3.

Построим перевод θ из L(TF) в L($C_{(1)}$):

1. θ(t) = SaP, для фиксированных S и P;
2. θ(f) = SeP, для фиксированных S и P;
3. θ(¬A) = ¬θ(A);
4. θ(A*B) = θ(A)*θ(B), где * – 2-х местная пропозициональная связка.

Лемма 5.3. $\forall A(\vdash_{TF} A \Leftrightarrow \vdash_{C(1)} \theta(A))$.

Доказательство полностью аналогично доказательству леммы 5.2.

1. $\vdash_{TF}$ t, ¬f – утверждение b) из пункта 2;
2. $\vdash_{C(1)}$ SaP, ¬SeP – для любых S и P, а значит и для фиксированных в определении θ;
3. Если A – истинностная константа t или f, то лемма очевидна из 1, 2 и пунктов 1-2 определения θ;
4. Пусть утверждение леммы доказано для формул B и C;
5. $\vdash_{TF} \neg B \Leftrightarrow \sim(\vdash_{TF} B) \Leftrightarrow \sim(\vdash_{C(1)}\theta(B)) \Leftrightarrow \vdash_{C(1)}\neg\theta(B) \Leftrightarrow \vdash_{C(1)}\theta(\neg B)$;
6. $\vdash_{TF} B\wedge C \Leftrightarrow \vdash_{TF} B$ & $\vdash_{TF} C \Leftrightarrow \vdash_{C(1)} \theta(B)$ & $\vdash_{C(1)} \theta(C) \Leftrightarrow \vdash_{C(1)} \theta(B)\wedge\theta(C) \Leftrightarrow \vdash_{C(1)} \theta(B\wedge C)$;
7. $\vdash_{TF} B\vee C \Leftrightarrow \vdash_{C(1)}\theta(B\vee C)$ – доказывается аналогично, используется соответствие $B\vee C \Leftrightarrow \neg(\neg B\wedge\neg C)$;
8. $\vdash_{TF} B\supset C \Leftrightarrow \vdash_{C(1)}\theta(B\supset C)$ – доказывается аналогично, используется соответствие $B\supset C \Leftrightarrow \neg B\vee C$;
9. $\vdash_{TF} B\equiv C \Leftrightarrow \vdash_{C(1)}\theta(B\equiv C)$ – доказывается аналогично, используется соответствие $B\equiv C \Leftrightarrow (B\supset C \wedge C\supset B)$;
10. индукцией по пунктам определения ППФ показано, что $\vdash_{TF} A \Leftrightarrow \vdash_{C(1)} \theta(A)$ для любой ППФ языка теории TF.

Следствие из теоремы 5.4. $C_{(1)}$ и TF – дефинициально эквивалентны.

В [Смирнов 2001, с. 393] предложено усилить понятие погружаемости и введено понятие рекурсивной вложимости теорий друг в друга. T_1 рекурсивно вложима в T_2 е.т.е. существуют функции θ и ψ такие, что

1. $\vdash_{T1} A \Rightarrow \vdash_{T2} \theta(A)$;
2. $\vdash_{T2} A \Rightarrow \vdash_{T1} \psi(A)$;
3. $\vdash_{T1} A \equiv \psi(\theta(A))$.

В связи с этим, результат леммы 5.3 можно усилить.

Теорема 5.5. TF – рекурсивно вложима в $C_{(1)}$.

2. $\vdash_{TF} A \Rightarrow \vdash_{C(1)}\theta(A)$ – из леммы 5.3;
3. $\vdash_{C(1)} A \Rightarrow \vdash_{TF}\psi(A)$ – из леммы 5.2;
4. Остается доказать, что $\vdash_{TF} A\equiv\psi(\theta(A))$:
   1. $t\equiv\psi(\theta(t)) \Leftrightarrow t\equiv\psi(SaP) \Leftrightarrow t\equiv t$;
   2. $f\equiv\psi(\theta(f)) \Leftrightarrow f\equiv\psi(SeP) \Leftrightarrow f\equiv f$;
   3. допустим, что для B и C утверждение доказано;
   4. $\vdash_{TF} B\equiv\psi(\theta(B)) \Leftrightarrow \vdash_{TF} \neg B\equiv\neg\psi(\theta(B)) \Leftrightarrow \vdash_{TF} \neg B\equiv\psi(\neg\theta(B)) \Leftrightarrow \vdash_{TF} \neg B\equiv\psi(\theta(\neg B))$;
   5. $\vdash_{TF} B\wedge C\equiv\psi(\theta(B))\wedge\psi(\theta(C)) \Leftrightarrow \vdash_{TF} B\wedge C\equiv\psi(\theta(B)\wedge\theta(C)) \Leftrightarrow \vdash_{TF} B\wedge C\equiv\psi(\theta(B\wedge C))$;
   6. для случаев, когда A есть $B\vee C$, $B\supset C$ или $B\equiv C$, доказывается аналогично;
   7. индукцией по пунктам определения ППФ показано, что $\vdash_{TF} A\equiv\psi(\theta(A))$ для любой ППФ языка теории TF;
5. TF – рекурсивно вложима в $C_{(1)}$ – на основании 1, 2 и 3.7 и определения рекурсивной вложимости.

6. Схема доказательства семантической адекватности

Зафиксируем следующие утверждения:

6.1. $ФС \subset C_4 \subset C_= \subset C(2) \subset C_{(1)}$ – по построению.

6.2. ФС адекватна описанной выше семантике – см. [Маркин 1991, С. 20-25].

6.3. C4 адекватна семантике ФС с дополнительным условием $\forall S(\varphi(S)\neq\varnothing)$.

6.4. $C_=$ адекватна семантике C4 с дополнительным условием $\forall S\forall P(\varphi(S)\cap\varphi(P)\neq\varnothing\Rightarrow\varphi(S)=\varphi(P))$.

6.5. C(2) адекватна семантике $C_=$ с дополнительным условием $\forall S\forall P\forall Q(\varphi(S)=\varphi(P)\vee\varphi(S)=\varphi(Q)\vee\varphi(P)=\varphi Q))$.

6.6. $C_{(1)}$ адекватна семантике $C_=$ с дополнительным условием $\forall S\forall P(\varphi(S)=\varphi(P))$.

Для доказательства утверждений 6.3-6.6 достаточно показать, что

1. формулы ($SaP\supset SiP$), ($SiP\supset SaP$), ($SeM\wedge MeP\supset SaP$) и SaP общезначимы в соответствующих семантиках (семантическая непротиворечивость);
2. формулы, ставшие общезначимыми благодаря условиям $\forall S(\varphi(S)\neq\varnothing)$, $\forall S\forall P(\varphi(S)\cap\varphi(P)\neq\varnothing \Rightarrow \varphi(S)=\varphi(P))$, $\forall S\forall P\forall Q(\varphi(S)=\varphi(P) \vee \varphi(S)=\varphi(Q) \vee \varphi(P)=\varphi Q))$, $\forall S\forall P(\varphi(S)=\varphi(P))$, доказуемы в соответствующих системах (семантическая полнота).

Итак, имеется ряд последовательно расширяющихся теорий $T_0 \subset T_1\subset T_2 \subset\ldots$; для T_0 – минимальной теории этого ряда – построена семантика и доказана ее адекватность (непротиворечивость и полнота T_0 относительно этой семантики). Семантика для T_1 получается добавлением к адекватной T_0 семантике некоторого условия I_1, семантика для T_2 – добавлением к семантике для T_1 условия I_2 и т.д. (обозначу: $M_1 = M_0 + I_1$, $M_2 = M_1 + I_2$, …). Сперва доказывается непротиворечивость теорий T_0, T_1, T_2, … относительно соответствующих семантик. Доказательство семантической полноты систем этого ряда проводится последовательно, начиная с T_1, и строится по следующей схеме.

Схема доказательства:

1. $T_0 \subset T_1$ – теорема;
2. $\forall A(T_0 \vdash A \Leftrightarrow M_0 \models A)$ – теорема;
3. $M_1 = M_0 + I_1$ – по построению;
4. $M_1 \models A$ – посылка;
5. $M_0 + I_1 \models A$ – из 3, 4;
6. $M_0 + (I_1^1 \ \&\ I_1^2 \ \&\ \ldots\ \&\ I_1^k) \models A$ – из 5, где $I_1^1, I_1^2, \ldots, I_1^k$ – все возможные формулы метаязыка, полученные из I_1 снятием кванторов по терминам формулы A;
7. $M_0 \models B_1\wedge B_2\wedge\ldots\wedge B_k\supset A$ – из 6, где каждое B_i – формула силлогистического языка, полученная из I_1^i путем эквивалентных преобразований по правилам интерпретации, и $T_1 \vdash B_i$;
8. $T_0 \vdash B_1\wedge B_2\wedge\ldots\wedge B_k\supset A$ – из 2, 7;
9. $T_1 \vdash B_1\wedge B_2\wedge\ldots\wedge B_k\supset A$ – из 1, 8;
10. $T_1 \vdash B_1, B_2, \ldots, B_k$ – условие подбора $B_1, B_2, \ldots, B_k$;
11. $T_1 \vdash B_1\wedge B_2\wedge\ldots\wedge B_k$ – из 10, КЛВ;
12. $T_1 \vdash A$ – из 11, 9 по m.p.;

13. M_1 |= A $\Rightarrow$ T_1 |– A – из 12, введение импликации, шаги 4-12 исключены;
14. $\forall$A(M_1 |= A $\Rightarrow$ T_1 |– A) – из 13, введение квантора общности.

Семантическая полнота доказана. Если доказана семантическая непротиворечивость T_1, то имеем семантическую адекватность T_1 относительно рассматриваемой семантики (т.е. $\forall$A(M_1 |= A $\Leftrightarrow$ T_1 |– A)) и можем переходить к доказательству семантической полноты следующей системы рассматриваемого ряда.

7. Семантическая непротиворечивость С4, $C_=$, С(2) и $C_{(1)}$

Теория Т – непротиворечива относительно некоторой семантики (M_T) е.т.е. $\forall$A(T |– A $\Rightarrow$ M_T |= A). Каждая теорема является либо аксиомой, либо получена из аксиом по правилам вывода. Поэтому для доказательства семантической непротиворечивости некоторой теории (заданной аксиоматическим исчислением) необходимо и достаточно показать (1) общезначимость в семантике всех аксиом исчисления и (2) неизменность общезначимости относительно правил вывода. Поскольку я задаю каждую новую теорию T_{i+1} ряда T_0, T_1, T_2, … добавлением к определению предыдущей теории T_i некоторой новой аксиомы, для формулировки T_i уже показаны (1) и (2) и семантика для T_{i+1} строится на базе семантики для T_i, то для T_i критерий (2) можно считать уже доказанным, а критерий (1) будет доказан после доказательства общезначимости вновь добавленной аксиомы в семантике для T_{i+1}.

Доказательство общезначимости формул (SaP$\supset$SiP), (SiP$\supset$SaP), (SeM$\wedge$MeP$\supset$SaP) и SaP тривиально проводится методом рассуждения от противного.

Лемма 7.1. M_{C4} |= (SaP$\supset$SiP).

1. ~(M_{C4} |= (SaP$\supset$SiP)) – посылка;
2. |SaP$\supset$SiP|$\neq$1 – из 1;
3. |SaP|=1 & |SiP|$\neq$1 – из 2;
4. |SaP|=1 – из 3;
5. |SiP|$\neq$1 – из 3;
6. φ(S)$\subseteq\varphi$(P) – из 4 по условию истинности для А;
7. φ(S)$\neq\varnothing$ – по семантическому условию;

8. $\varphi(S)\cap\varphi(P)\neq\varnothing$ – из 6, 7;
9. $|SiP|=1$ – из 8 по условию истинности для I;
10. M_{C4} |= $(SaP\supset SiP)$ – из 5, 9 по введению отрицания и снятию двойного отрицания; шаги 1-9 исключены из вывода.

Лемма 7.2. $M_{C=}$ |= $(SiP\supset SaP)$.

1. ~($M_{C=}$ |= $(SiP\supset SaP)$) – посылка;
2. $|SiP\supset SaP|\neq 1$ – из 1;
3. $|SiP|=1$ & $|SaP|\neq 1$ – из 2;
4. $|SiP|=1$ – из 3;
5. $|SaP|\neq 1$ – из 3;
6. $\varphi(S)\cap\varphi(P)\neq\varnothing$ – из 4 по условию истинности для I;
7. $\varphi(S)=\varphi(P)$ – из 6 по семантическому условию для $C_=$ и m.p.;
8. $\varphi(S)\subseteq\varphi(P)$ – из 7;
9. $|SaP|=1$ – из 8 по условию истинности для A;
10. $M_{C=}$ |= $(SiP\supset SaP)$ – из 5, 9 по введению отрицания и снятию двойного отрицания; шаги 1-9 исключены из вывода.

Лемма 7.3. $M_{C(2)}$ |= $(SeM\wedge MeP\supset SaP)$.

1. ~($M_{C(2)}$ |= $(SeM\wedge MeP\supset SaP)$) – посылка;
2. $|SeM\wedge MeP\supset SaP|\neq 1$ – из 1;
3. $|SeM\wedge MeP|=1$ & $|SaP|\neq 1$ – из 2;
4. $|SeM\wedge MeP|=1$ – из 3;
5. $|SaP|\neq 1$ – из 3;
6. $|SeM|=1$ & $|MeP|=1$ – из 4;
7. $|SeM|=1$ – из 6;
8. $|MeP|=1$ – из 6;
9. $\varphi(S)\cap\varphi(P)=\varnothing$ – из 7 по условию истинности для E;
10. $\varphi(S)\cap\varphi(P)=\varnothing$ – из 8 по условию истинности для E;
11. $\varphi(S)\neq\varphi(M)$ – из 9 и условию о непустоте терминов;
12. $\varphi(M)\neq\varphi(P)$ – из 10 и условию о непустоте терминов;
13. $\varphi(S)=\varphi(P)$ – из 11, 12 и семантического условия для C(2);
14. $\varphi(S)\subseteq\varphi(P)$ – из 13;
15. $|SaP|=1$ – из 14 по условию истинности для A;
16. $M_{C(2)}$ |= $(SeM\wedge MeP\supset SaP)$ – из 5, 15 по введению отрицания и снятию двойного отрицания; шаги 1-15 исключены из вывода.

Лемма 7.4. $M_{C(1)}$ |= SaP.

1. ~($M_{C(1)}$ |= SaP) – посылка;
2. $|SaP|\neq 1$ – из 1;

3. $\sim(\varphi(S)\subseteq\varphi(P))$ – из 2;
4. $\forall S\forall P(\varphi(S)=\varphi(P))$ – семантическое условие;
5. $\varphi(S)=\varphi(P)$ – из 4;
6. $\varphi(S)\subseteq\varphi(P)$ – из 5;
7. $M_{C(1)} \models SaP$ – из 3, 6, введение отрицания, снятие двойного отрицания; шаги 1-15 исключены из вывода.

Теорема 7.1. $\forall A(C4 \vdash A \Rightarrow M_{C4} \models A)$.

1. $\forall A(ФС \vdash A \Rightarrow M_{ФС} \models A)$ – по утверждению 6.2;
2. $C4=ФС+(SaP\supset SiP)$ – теорема;
3. всякая аксиома C4 общезначима в семантике M_{C4} – из 1, 2 и леммы 7.1;
4. все правила вывода C4 сохраняют общезначимость – из 1;
5. $\forall A(C4 \vdash A \Rightarrow M_{C4} \models A)$ – из 3, 4, по критериям (1) и (2).

Теорема 7.2. $\forall A(C_= \vdash A \Rightarrow M_{C=} \models A)$.

1. $\forall A(C4 \vdash A \Rightarrow M_{C4} \models A)$ – теорема 7.1;
2. $C_==C4+(SiP\supset SaP)$ – по построению;
3. всякая аксиома $C_=$ общезначима в семантике $M_{C=}$ – из 1, 2 и леммы 7.2;
4. все правила вывода $C_=$ сохраняют общезначимость – из 1;
5. $\forall A(C_= \vdash A \Rightarrow M_{C=} \models A)$ – из 3, 4, по критериям (1) и (2).

Теорема 7.3. $\forall A(C(2) \vdash A \Rightarrow M_{C(2)} \models A)$.

1. $\forall A(C_= \vdash A \Rightarrow M_{C=} \models A)$ – теорема 7.2;
2. $C(2)=C_=+(SeM\wedge MeP\supset SaP)$ – теорема;
3. всякая аксиома C(2) общезначима в семантике $M_{C(2)}$ – из 1, 2 и леммы 7.3;
4. все правила вывода C(2) сохраняют общезначимость – из 1;
5. $\forall A(C(2) \vdash A \Rightarrow M_{C(2)} \models A)$ – из 3, 4, по критериям (1) и (2).

Теорема 7.4. $\forall A(C_{(1)} \vdash A \Rightarrow M_{C(1)} \models A)$.

1. $\forall A(C_= \vdash A \Rightarrow M_{C=} \models A)$ – теорема 7.2;
2. $C_{(1)}=C_=+SaP$ – теорема;
3. всякая аксиома $C_{(1)}$ общезначима в семантике $M_{C(1)}$ – из 1, 2 и леммы 7.4;
4. все правила вывода $C_{(1)}$ сохраняют общезначимость – из 1;
5. $\forall A(C_{(1)} \vdash A \Rightarrow M_{C(1)} \models A)$ – из 3, 4, по критериям (1) и (2).

8. Семантическая полнота и семантическая адекватность С4, $С_{=}$, С(2) и $С_{(1)}$

Для упрощения доказательства некоторых теорем, сформулирую ряд лемм.

Лемма 8.1. $\forall S(\varphi(S)\neq\varnothing)$, $\varphi(S)\subseteq\varphi(P)$ **|–** $\varphi(S)\cap\varphi(P)\neq\varnothing$.

Утверждение леммы очевидно для классической теории множеств.

Лемма 8.2. $\forall S(\varphi(S)\neq\varnothing)$, $\forall S\forall P(\varphi(S)\cap\varphi(P)\neq\varnothing \Rightarrow \varphi(S)=\varphi(P))$ **|–** **(**$\varphi(S)=\varphi(P) \Leftrightarrow \varphi(S)\subseteq\varphi(P)$**)**.

1. $\forall S(\varphi(S)\neq\varnothing)$ – условие;
2. $\forall S\forall P(\varphi(S)\cap\varphi(P)\neq\varnothing \Rightarrow \varphi(S)=\varphi(P))$ – условие;
3. $\varphi(S)=\varphi(P) \Leftrightarrow \varphi(S)\subseteq\varphi(P)\ \&\ \varphi(P)\subseteq\varphi(S)$ – соотношение = и $\subseteq$;
4. $\varphi(S)=\varphi(P) \Rightarrow \varphi(S)\subseteq\varphi(P)$ – из 2;
5. $(\forall S(\varphi(S)\neq\varnothing)\ \&\ \varphi(S)\subseteq\varphi(P)) \Rightarrow \varphi(S)\cap\varphi(P)\neq\varnothing$ – по лемме 8.1;
6. $\forall S(\varphi(S)\neq\varnothing) \Rightarrow (\varphi(S)\subseteq\varphi(P) \Rightarrow \varphi(S)\cap\varphi(P)\neq\varnothing)$ – из 5, КЛВ;
7. $\varphi(S)\subseteq\varphi(P) \Rightarrow \varphi(S)\cap\varphi(P)\neq\varnothing$ – из 1, 6, m.p.;
8. $\varphi(S)\cap\varphi(P)\neq\varnothing \Rightarrow \varphi(S)=\varphi(P)$ – из 2, снятие кванторов общности по S и P;
9. $\varphi(S)\subseteq\varphi(P) \Rightarrow \varphi(S)=\varphi(P)$ – из 7, 8, транзитивность импликации;
10. $\varphi(S)=\varphi(P) \Leftrightarrow \varphi(S)\subseteq\varphi(P)$ – из 4, 9, определение эквиваленции через следование.

Лемма 8.3. $\forall S(\varphi(S)\neq\varnothing)$, $\forall S\forall P(\varphi(S)\cap\varphi(P)\neq\varnothing \Rightarrow \varphi(S)=\varphi(P))$ **|–** $\varphi(S)\subseteq\varphi(P) \Leftrightarrow \varphi(S)\cap\varphi(P)\neq\varnothing$.

Утверждение очевидно из лемм 8.1 и 8.2.

Теорема 8.1. С4 – полна относительно семантики M_{C4}.

1. $ФС \subset С4$ – по утверждению 6.1;
2. $\forall A(ФС \mid\!\!- A \Leftrightarrow M_{ФС} \models A)$ – утверждение 6.2;
3. $M_{C4} = M_{ФС} + \forall S(\varphi(S)\neq\varnothing)$ – по построению;
4. $M_{C4} \models A$ – посылка;
5. $M_{ФС} + \forall S(\varphi(S)\neq\varnothing) \models A$ – из 3, 4;
6. $M_{ФС} + \forall S(\varphi(S)\cap\varphi(S)\neq\varnothing) \models A$ – из 5;
7. $M_{ФС} + (\varphi(S_1)\cap\varphi(S_1)\neq\varnothing\ \&\ \varphi(S_2)\cap\varphi(S_2)\neq\varnothing\ \&\ \ldots\ \&\ \varphi(S_n)\cap\varphi(S_n)\neq\varnothing) \models A$ – из 6, где $S_1, S_2, \ldots, S_n$ – все термины формулы А;
8. $M_{ФС} \models (S_1iS_1\wedge S_2iS_2\wedge\ldots\wedge S_niS_n)\supset A$ – из 7;

9. ФС $|–$ $(S_1iS_1 \wedge S_2iS_2 \wedge \ldots \wedge S_niS_n) \supset A$ – из 8 и 2;
10. C4 $|–$ $(S_1iS_1 \wedge S_2iS_2 \wedge \ldots \wedge S_niS_n) \supset A$ – из 9 и 1;
11. C4 $|–$ S_1iS_1, S_2iS_2, …, S_niS_n – по определению C4;
12. C4 $|–$ $S_1iS_1 \wedge S_2iS_2 \wedge \ldots \wedge S_niS_n$ – из 11, введение конъюнкции;
13. C4 $|–$ A – из 10, 12, m.p.;
14. M_{C4} $|=$ A $\Rightarrow$ C4 $|–$ A – из 13, введение импликации; шаги 4-13 исключены;
15. $\forall A(M_{C4} |= A \Rightarrow C4 |– A)$ – из 14, введение квантора общности.

Теорема 8.2. $\forall A(C4 |– A \Leftrightarrow M_{C4} |= A)$.
Утверждение следует из теорем 7.1 и 8.1.

Теорема 8.3. $C_=$ – полна относительно семантики $M_{C=}$.

1. $C4 \subset C_=$ – по утверждению 6.1;
2. $\forall A(C4 |– A \Leftrightarrow M_{C4} |= A)$ – теорема 8.2;
3. $M_{C=} = M_{C4} + \forall S \forall P(\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \varnothing \Rightarrow \varphi(S)=\varphi(P))$ – по построению;
4. $M_{C=}$ $|=$ A – посылка;
5. $M_{C4} + \forall S \forall P(\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \varnothing \Rightarrow \varphi(S)=\varphi(P))$ $|=$ A – из 3, 4;
6. $M_{C4} + \forall S \forall P(\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \varnothing \Rightarrow \varphi(S) \subseteq \varphi(P))$ $|=$ A – из 5;
7. $M_{C4} + (\varphi(S_1) \cap \varphi(S_1) \neq \varnothing \Rightarrow \varphi(S_1) \subseteq \varphi(S_1)$ & $\varphi(S_1) \cap \varphi(S_2) \neq \varnothing \Rightarrow \varphi(S_1) \subseteq \varphi(S_2)$ & … & $\varphi(S_n) \cap \varphi(S_n) \neq \varnothing \Rightarrow \varphi(S_n) \subseteq \varphi(S_n))$ $|=$ A – из 6, где S_1, S_2, …, S_n – все термины формулы A;
8. M_{C4} $|=$ $(S_1iS_1 \supset S_1aS_1 \wedge S_1iS_2 \supset S_1aS_2 \wedge \ldots \wedge S_niS_n \supset S_naS_n) \supset A$ – из 7;
9. C4 $|–$ $(S_1iS_1 \supset S_1aS_1 \wedge S_1iS_2 \supset S_1aS_2 \wedge \ldots \wedge S_niS_n \supset S_naS_n) \supset A$ – из 8, 2;
10. $C_=$ $|–$ $(S_1iS_1 \supset S_1aS_1 \wedge S_1iS_2 \supset S_1aS_2 \wedge \ldots \wedge S_niS_n \supset S_naS_n) \supset A$ – из 9, 1;
11. $C_=$ $|–$ $S_1iS_1 \supset S_1aS_1$, $S_1iS_2 \supset S_1aS_2$, …, $S_niS_n \supset S_naS_n$ – по определению $C_=$;
12. $C_=$ $|–$ $S_1iS_1 \supset S_1aS_1 \wedge S_1iS_2 \supset S_1aS_2 \wedge \ldots \wedge S_niS_n \supset S_naS_n$ – из 11, введение конъюнкции;
13. $C_=$ $|–$ A – из 10, 12 по m.p.;
14. $M_{C=}$ $|=$A $\Rightarrow$ $C_=$ $|–$ A – из 13, введение импликации; шаги 4-13 исключены;
15. $\forall A(M_{C=} |=A \Rightarrow C_= |– A)$ – из 14, введение квантора общности.

Теорема 8.4. $\forall A(C_= |– A \Leftrightarrow M_{C=} |= A)$.

Утверждение следует из теорем 7.2 и 8.3.

Теорема 8.5. C(2) – полна относительно семантики $M_{C(2)}$.

1. $C_= \subset C(2)$ – по утверждению 6.1;
2. $\forall A(C_= \vdash A \Leftrightarrow M_{C=} \models A)$ – теорема 8.4;
3. $M_{C(2)} = M_{C=} + \forall S\forall P\forall Q(\varphi(S)=\varphi(P) \vee \varphi(S)=\varphi(Q) \vee \varphi(P)=\varphi(Q))$ – по построению;
4. $M_{C=} \models A$ – посылка;
5. $M_{C=} + \forall S\forall P\forall Q(\varphi(S)=\varphi(P) \vee \varphi(S)=\varphi(Q) \vee \varphi(P)=\varphi(Q)) \models A$ – из 3, 4;
6. $M_{C=} + \forall S\forall P\forall Q(\varphi(S)\cap\varphi(P)\neq\varnothing \vee \varphi(S)\cap\varphi(Q)\neq\varnothing \vee \varphi(P) \subseteq\varphi(Q)) \models A$ – из 5, подстановка эквивалентного, леммы 8.2 и 8.3;
7. $M_{C=} + \forall S\forall P\forall Q(\sim(\varphi(S)\cap\varphi(P)=\varnothing \ \& \ \varphi(S)\cap\varphi(Q)=\varnothing) \vee \varphi(P)\subseteq\varphi(Q)) \models A$ – из 6, правило де Моргана, снятие двойного отрицания;
8. $M_{C=} + \forall S\forall P\forall Q((\varphi(S)\cap\varphi(P)=\varnothing \ \& \ \varphi(S)\cap\varphi(Q)=\varnothing) \Rightarrow \varphi(P)\subseteq\varphi(Q)) \models A$ – из 7, КЛВ;
9. $M_{C=} + ((\varphi(S_1)\cap\varphi(S_1)=\varnothing \ \& \ \varphi(S_1)\cap\varphi(S_1)=\varnothing) \Rightarrow \varphi(S_1)\subseteq\varphi(S_1)) \ \& \ (\varphi(S_1)\cap\varphi(S_1)=\varnothing \ \& \ \varphi(S_1)\cap\varphi(S_2)=\varnothing) \Rightarrow \varphi(S_1)\subseteq\varphi(S_2)) \ \& \ \ldots \ \& \ (\varphi(S_n)\cap\varphi(S_n)=\varnothing \ \& \ \varphi(S_n)\cap\varphi(S_n)=\varnothing) \Rightarrow \varphi(S_n)\subseteq\varphi(S_n))) \models A$ – из 8, где $S_1, S_2, \ldots, S_n$ – все термины формулы A;
10. $M_{C=} \models ((S_1eS_1\wedge S_1eS_1\supset S_1aS_1) \wedge (S_1eS_1\wedge S_1eS_2\supset S_1aS_2) \wedge\ldots\wedge (S_neS_n\wedge S_neS_n\supset S_naS_n))\supset A$ – из 9;
11. $C_= \vdash ((S_1eS_1\wedge S_1eS_1\supset S_1aS_1) \wedge (S_1eS_1\wedge S_1eS_2\supset S_1aS_2) \wedge\ldots\wedge (S_neS_n\wedge S_neS_n\supset S_naS_n))\supset A$ – из 10, 2;
12. $C(2) \vdash ((S_1eS_1\wedge S_1eS_1\supset S_1aS_1) \wedge (S_1eS_1\wedge S_1eS_2\supset S_1aS_2) \wedge\ldots\wedge (S_neS_n\wedge S_neS_n\supset S_naS_n))\supset A$ – из 11, 1;
13. $C(2) \vdash (S_1eS_1\wedge S_1eS_1\supset S_1aS_1), (S_1eS_1\wedge S_1eS_2\supset S_1aS_2), \ldots, (S_neS_n\wedge S_neS_n\supset S_naS_n)$ – по определению $C_=$;
14. $C(2) \vdash ((S_1eS_1\wedge S_1eS_1\supset S_1aS_1) \wedge (S_1eS_1\wedge S_1eS_2\supset S_1aS_2) \wedge\ldots\wedge (S_neS_n\wedge S_neS_n\supset S_naS_n))$ – из 13, введение конъюнкции;
15. $C(2) \vdash A$ – из 12, 14 по m.p.;
16. $M_{C(2)} \models A \Rightarrow C(2) \vdash A$ – из 15, введение импликации; шаги 4-15 исключены;
17. $\forall A(M_{C(2)} \models A \Rightarrow C(2) \vdash A)$ – из 16, введение квантора общности.

Теорема 8.6. $\forall A(C(2) \vdash A \Leftrightarrow M_{C(2)} \models A)$.
Утверждение следует из теорем 7.3 и 8.5.

Теорема 8.7. Полнота $C_{(1)}$ – полна относительно семантики $M_{C(1)}$.

1. $C_{=} \subset C_{(1)}$ – по утверждению 6.1;
2. $\forall A(C_{=} \vdash A \Leftrightarrow M_{C=} \models A)$ – теорема 8.6;
3. $M_{C(2)} = M_{C=} + \forall S \forall P(\varphi(S)=\varphi(P))$ – по построению;
4. $M_{C=} \models A$ – посылка;
5. $M_{C=} + \forall S \forall P(\varphi(S)=\varphi(P)) \models A$ – из 3, 4;
6. $M_{C=} + \forall S \forall P(\varphi(S)\subseteq\varphi(P)) \models A$ – из 5, подстановка эквивалентного, лемма 8.2;
7. $M_{C=} + (\varphi(S_1)\subseteq\varphi(S_1)\ \&\ \varphi(S_1)\subseteq\varphi(S_2)\ \&\ \dots\ \&\ \varphi(S_n)\subseteq\varphi(S_n)) \models A$ – из 6, где $S_1, S_2, \dots, S_n$ – все термины формулы A;
8. $M_{C=} \models (S_1aS_1 \wedge S_1aS_2 \wedge \dots \wedge S_naS_n) \supset A$ – из 7;
9. $C_{=} \vdash (S_1aS_1 \wedge S_1aS_2 \wedge \dots \wedge S_naS_n) \supset A$ – из 8, 2;
10. $C_{(1)} \vdash (S_1aS_1 \wedge S_1aS_2 \wedge \dots \wedge S_naS_n) \supset A$ – из 9, 1;
11. $C_{(1)} \vdash S_1aS_1, S_1aS_2, \dots, S_naS_n$ – по определению $C_{(1)}$;
12. $C_{(1)} \vdash (S_1aS_1 \wedge S_1aS_2 \wedge \dots \wedge S_naS_n)$ – из 11, введение конъюнкции;
13. $C_{(1)} \vdash A$ – из 10, 12 по m.p.;
14. $M_{C(1)} \models A \Rightarrow C_{(1)} \vdash A$ – из 13, введение импликации; шаги 4-13 исключены;
15. $\forall A(M_{C(1)} \models A \Rightarrow C_{(1)} \vdash A)$ – из 14, введение квантора общности.

Теорема 8.8. $\forall A(C_{(1)} \vdash A \Leftrightarrow M_{C(1)} \models A)$.

Утверждение следует из теорем 7.4 и 8.7.

9. Построение счетного класса расширений $C_{=}$

Рассматриваемый класс теорий порождается рядом последовательных ослаблений аксиомы SaP[14]. Ослабления

---

[14] Идея навеяна результатом А. Роуза [Rose 1956] об аксиоматизации импликативных фрагментов n-значных логик Лукасевича ($L_{n\to}$). К аксиоматизации импликативного фрагмента бесконечнозначной логики Лукасевича ($L_{\omega\to}$) добавляется закон Пирса: $(((p\to q)\to p)\to p)$, в результате чего получаем импликативный фрагмент классики (= импликативному фрагменту 2-значной логики Лукасевича). Далее последовательно ослабляем закон Пирса, подставляя в имеющуюся формулу $(p\to q)$ вместо q. Т.е., $L_{2\to}=L_{\omega\to}+(((p\to q)\to p)\to p)$, $L_{3\to}=L_{\omega\to}+(((p\to(p\to q))\to p)\to p)$ и т.д. (см. [Карпенко 1997]).

происходят по закону классической логики $A \Rightarrow (B \vee A)$. Вот рекурсивное определение этого ряда:

$A_1 = S_1aS_2$;

...

$A_{n+1} = S_1aS_{n+2} \vee S_2aS_{n+2} \vee ... \vee S_{n+1}aS_{n+2} \vee A_n$, где $S_1, S_2, ..., S_{n+1}$ – список всех терминов, входящих в A_n, и S_{n+2} – термин, не входящий в A_n;

...

Каждая теория $C_{(i)}$ порождаемого класса есть $(C_= + A_i)$. Иначе говоря, рассматриваемый класс есть множество $\{C_{(i)} / C_{(i)} = C_= + A_i\}$.

Для n=2 получаем: $S_1aS_3 \vee S_2aS_3 \vee S_1aS_2 \Leftrightarrow \neg(S_1eS_3) \vee \neg(S_3eS_2) \vee S_1aS_2 \Leftrightarrow (S_1eS_3 \wedge S_3eS_2) \supset S_1aS_2 \Leftrightarrow SeM \wedge MeP \supset SaP$, т.е. рассмотренная выше теория C(2) есть $C_{(2)}$.

Семантику для каждой теории $C_{(i)}$ получаем присоединением к семантике адекватной $C_=$ дополнительного семантического условия I_i. Для $C_=$ имеет место следующая эквивалентность: $|SaP|=1 \Leftrightarrow \varphi(S) \subseteq \varphi(P) \Leftrightarrow \varphi(S)=\varphi(P)$ (лемма 8.2). I_i получаем из характеристической аксиомы A_i путем эквивалентных преобразований с последующим введением кванторов общности по всем терминам $S_1, S_2, ..., S_{i+1}$ полученной формулы. Если $A_i = S_1aS_{i+1} \vee S_2aS_{i+1} \vee \ldots \vee S_iaS_{i+1} \vee S_1aS_i \vee \ldots \vee S_1aS_2$, то (по определению φ и лемме 8.2) получаем:

$|S_1aS_{i+1} \vee S_2aS_{i+1} \vee \ldots \vee S_iaS_{i+1} \vee S_1aS_i \vee \ldots \vee S_1aS_2|=1 \Leftrightarrow (\varphi(S_1)=\varphi(S_{i+1}) \vee \varphi(S_2)=\varphi(S_{i+1}) \vee \ldots \vee \varphi(S_i)=\varphi(S_{i+1}) \vee \varphi(S_1)=\varphi(S_i) \vee \ldots \vee \varphi(S_1)=\varphi(S_2))$.

Отсюда имеем:

$\vdash (S_1aS_{i+1} \vee S_2aS_{i+1} \vee \ldots \vee S_iaS_{i+1} \vee S_1aS_i \vee \ldots \vee S_1aS_2) \Leftrightarrow \forall S_1 \forall S_2 ... \forall S_{i+1}(\varphi(S_1)=\varphi(S_{i+1}) \vee \varphi(S_2)=\varphi(S_{i+1}) \vee \ldots \vee \varphi(S_i)=\varphi(S_{i+1}) \vee \varphi(S_1)=\varphi(S_i) \vee \ldots \vee \varphi(S_1)=\varphi(S_2))$.

Для i=1 и i=2 (теории $C_{(1)}$ и C(2)) семантическая адекватность была доказана выше.

Формула I_n говорит, что для любых n+1 терминов теории $C_{(n)}$ объемы по крайней мере двух терминов совпадают; иначе: модель теории содержит не более n объектов, которые можно приписывать в качестве значений терминам этой теории. Условие $\forall S \forall P(\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \varnothing \Rightarrow \varphi(S)=\varphi(P))$ (при наличии $\forall S(\varphi(S) \neq \varnothing)$) естественно понимать как требование единичности объемов всех терминов теории, а I_n – как требование, чтобы предметная область содержала не более n объектов.

Добавляя SaP к формулировкам более слабых теорий, чем $C_=$, (C4, C2, C3, C1, ...), видимо, можно получать другие счетные классы теорий с супремумом в $C_{(1)}$.

Литература[15]

1. [Бочаров 1984] Бочаров В.А. Аристотель и традиционная силлогистика. М., 1984.
2. [Бочаров 1986] Бочаров В.А. Эктезис в силлогистике C2 // Философские проблемы истории логики и методологии науки (Материалы к Всесоюзной конференции «Методологические и мировоззренческие проблемы истории философии», секция X). Часть I. М., 1986.
3. [Маркин 1986] Маркин В.И. Аксиоматизация фундаментальной силлогистики Г. Лейбница // Философские проблемы истории логики и методологии науки (Материалы к Всесоюзной конференции «Методологические и мировоззренческие проблемы истории философии», секция X). Часть I. М., 1986.
4. [Маркин 1991] Маркин В.И. Силлогистические теории в современной логике. М., 1991.
5. [Маркин 1998] Маркин В.И. Системы силлогистики, адекватные двум переводам силлогистических формул в исчисление предикатов В.А. Смирнова // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН 1997. М., 1998.
6. [Мчедлишвили 1986] Мчедлишвили Л.И. Позитивная ассерторическая силлогистика и логика одноместных предикатов // Логика и системные методы анализа научного знания. М., 1986.
7. [Мчедлишвили 1999] Мчедлишвили Л.И. К семантике аподиктической силлогистики Аристотеля // Логические исследования. Вып. 6. М.: Наука, 1999.
8. [Попов 1997] Попов В.М. Расширение системы C2 В.А. Смирнова и $\cap$-полурешетка с нулем // Международная конференция “Развитие логики в России: итоги и перспективы”. Тезисы докладов и сообщений. М., 1997.

[15] Через дробь указывается год переиздания, например: [Смирнов 1987/2002].

9. [Смирнов 1987/2002][16] Смирнов В.А. Логические методы анализа научного знания. М.: Наука, 1987. М., 2002.
10. [Смирнов 1994] Смирнов В.А. Дефинициальная эквивалентность систем силлогистики // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН 1993. М., 1994. Переиздано в [Смирнов 2001].
11. [Смирнов 2001] Логико-философские труды В.А. Смирнова. М.: УРСС, 2001.
12. [Шиян 2000] Шиян Т.А. Классификация теорий чистой позитивной силлогистики // Логические Исследования (Logical Studies), №4; www.logic.ru.
13. [Шиян 2001] Шиян Т.А. Классификация силлогистических теорий // Смирновские чтения. 3 Международная конференция. Москва, 2001.
14. [Шиян 2002] Шиян Т.А. Методы классификации формальных теорий и множество силлогистик // Аспекты: Сборник статей по философским проблемам истории и современности. М.: Изд-во «Современные тетради», 2002.
15. [Rose 1956] Rose A. Formalization du calcul propositionel implicatif a m-valeurs de Lukasiewicz // Comptes rendud hebdomadaires des seance de l'Academi des Sciences. 1956. Vol. 243, p.1263-1264.
16. [Tarski 1956] Tarski A. Foundations of the calculus of system // Logic, semantics, metamathematics. Oxford, 1956.

[16] Страницы указываются по изданию 2002 года.