Классификация теорий чистой позитивной силлогистики[1]

Шиян Т.А. Классификация теорий чистой позитивной силлогистики // Электронный журнал *Logical Studies*. №4 (2000). www.logic.ru.
Сохранено с сайта: http://taras-shiyan.narod.ru.
E-mail: taras_a_shiyan@mail.ru.

Abstract. *In this paper are given the account of a classification of some syllogistics with simple common terms (among them are appropriate fragments of logics of Aristoteles (C2), of Leibniz (ФС), of Lewis Carroll (КС), of Bolzano (БС), fragment of traditional logic (syllogistic of Łukasiewicz, C4) and some another theories). Results are presented in graph (its points corresponding to syllogistics and connectives between points corresponding to the relation of inclusion between the sets of the theorems of the syllogistics).*

В данной статье описывается построение классификации нескольких теорий чистой позитивной силлогистики (теорий С2, ФС, КС, БС, С4, С3 и С3.1). В основе классификации лежит задание на множестве всех теорий, сформулированных в одном языке на базе классической логики, отношения порядка. Результаты классификации представлены в виде направленного графа. Указан ряд синтаксических расширений и ослаблений классических силлогистических теорий.

0. Введение. В последние десятилетия XX века логиками Советского Союза и других стран был построен ряд формальных систем, репрезентирующих некоторые силлогистические теории. Часть этих систем признана адекватными формализациями тех или иных фрагментов исторически известных теорий. Другая часть считается представляющей новые, ранее не известные теории. На русском языке наиболее систематическим изложением полученных к началу 90-х годов результатов является работа В.И. Маркина “Силлогистические теории в современной логике” [Маркин 1991]. Несмотря на многочисленные достижения в данной области (в том числе теоремы о рекурсивной и дефинициальной эквивалентности или неэквивалентности некоторых систем), вопрос о соотношении силлогистических теорий считался специалистами до конца не решенным. В данной статье представлены некоторые результаты проведенной мной классификаторской работы, объектом которой стало несколько простейших силлогистических теорий. В конце приводится основанное на построенной классификации простое доказательство синтаксической непротиворечивости рассмотренных теорий.

1. Примененный метод классификации. Для прояснения вопроса о соотношении силлогистических теорий я применил ослабленный метод, ранее использованный А.С. Карпенко для классификации некоторых пропозициональных логик и их фрагментов (см., например, [Карпенко 1997, 1999] и библиографию в [1997]). Примененный мной метод состоит в следующем.

1) Теории, подвергающиеся классификации, формулируются в одном языке.
2) Множества дедуктивных постулатов классифицируемых теорий подбираются так, что все они предстают как расширения некоторой минимальной системы, называемой мной базисом (классификации).
3) На множестве всех сформулированных таким образом теорий задается отношение порядка, соответствующее отношению включения множеств теорем этих теорий друг в друга.

4) Для множества рассматриваемых теорий и различных его подмножеств ищутся по заданному отношению наименьшие и наибольшие общие грани (желательно точные).
5) Аналитической целью (которую я в данной работе не реализовывал) является построение решетки теорий.
6) Учитывая психологию человеческого восприятия, основной практической целью мне видится представление результатов проведенных исследований в виде некоторого (по возможности более простого) графа. Это позволяет с помощью одного легко воспринимаемого изображения получить ясное представление о соотношении изученных систем.

2. Исходные определения.

1) Под *формальной системой* я понимаю упорядоченную пару $<L; D>$, где L – некоторый формальный язык, D – множество дедуктивных постулатов (аксиом, схем аксиом, правил вывода), определяющих некоторое множество формул данного языка (замкнутое относительно правил вывода) (т.е. множество теорем).
2) Под *формальной теорией* я понимаю множество формул (теорем), задаваемых некоторой формальной системой.
3) Множество рассматриваемых формальных теорий буду обозначать H.
4) Язык рассматриваемых теорий состоит из:
   a) логических констант: $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\equiv$;
   b) силлогистических констант: a, e, i, o (рассматриваемых в качестве двухместных первопорядковых предикаторов);
   c) бесконечного списка силлогистических терминов: S, P, M, S_1; P_1, M_1, … (рассматриваемых в качестве индивидных параметров);
   d) круглых скобок.

Высказывания:

   a) выражения типа $\alpha_1 * \alpha_2$, где α_1 и α_2 – некоторые индивидные параметры и * – некоторая силлогистическая константа;
   b) выражения, правильно построенные из других высказываний посредством логических констант.

Элементарными буду называть высказывания, соответствующие пункту a), и, в зависимости от использованной константы, буду говорить о них как о высказываниях типа A, I, E, O.
5) В качестве базиса классификации зафиксирую некоторую формулировку классической логики высказываний (КЛВ), подогнанную под данный язык и имеющую среди правил вывода modus ponens (и, возможно, правило подстановки). Все остальные системы буду получать добавлением к базису того или иного множества аксиом.
6) Теорию, задаваемую избранным базисом классификации, буду обозначать $C_\varnothing$, а ее противоречивое собственное расширение – $C_\perp$.
7) Пусть T_1 и T_2 формальные теории, сформулированные в данном языке, и Cn(Г) – дедуктивное замыкание множества Г, тогда
   a) T_1 меньше $T_2 \Leftrightarrow T_1 \subseteq T_2$;
   b) $\min(T_1,T_2)=T_1 \cap T_2$.
   c) $\max(T_1,T_2)=Cn(T_1 \cup T_2)$.

Если $T_1 \subseteq T_2$, то T_1 буду называть *подтеорией* T_2.

Если к аксиоматике системы T прибавляются аксиомы A_1, A_2, …, то буду писать $T+A_1+A_2+\dots$ (или $T+\{A_1, A_2, \dots\}$) и, соответственно, $T–A_1–A_2–\dots$ (или $T–\{A_1, A_2, \dots\}$) – если исключаются.

Вместо $Cn(T_1 \cup T_2)$ также буду писать T_1+T_2.

3. Множество классифицируемых систем Н. Изучению подверглись восемь систем, репрезентирующих силлогистики с простыми общими терминами (чистые позитивные силлогистики). Это формализации чистых позитивных фрагментов логик Аристотеля (С2), Лейбница (фундаментальная силлогистика, ФС), Больцано (БС), Кэрролла (КС), традиционной силлогистики (С4), а также системы С1, С3 и С3.1. Формулировки систем взяты мной из [Маркин 1991] и несколько изменены. В таблице 1 указано какие аксиомы надо добавить к $C_{\varnothing}$ для получения той или другой теории из множества Н. Знак “+” в таблице означает, что формула данной строки является аксиомой указанной в столбце системы; “$\vdash$” – что формула не является аксиомой, но доказуема в данной системе; “–” – что формула не является теоремой.

Таблица 1.

N	Аксиомы	С1	С2	КС	БС	С3	С3.1	ФС	С4
1	$(SaM \wedge MaP) \supset SaP$	+	+	+	+	+	+	+	+
2	$(SaM \wedge MeP) \supset SeP$	+	+	+	+	+	+	+	+
3	$SiP \supset PiS$	+	+	+	+	+	+	+	+
4	$SaP \supset SiP$	+	+	+	+	+	+	–	+
5	$SiP \supset SiS$	–	+	+	+	$\vdash$	$\vdash$	+	$\vdash$
6	$SiS \supset SaS$	–	+	+	+	–	–	+	+
7	$SaP \supset (SaS \wedge PaP)$	–	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$	–	+	$\vdash$	$\vdash$
8	$SoP \supset SiS$	–	–	$\vdash$	$\vdash$	+	$\vdash$	+	+
9	$SeP \supset SaS$	–	–	–	$\vdash$	–	+	+	$\vdash$
10	$SeP \equiv \rceil SiP$	+	+	+	–	+	+	+	+
11	$SeP \equiv \rceil SiP \wedge SiS$	–	–	–	+	$\vdash$	$\vdash$	–	$\vdash$
12	$SoP \equiv \rceil SaP$	+	+	–	–	+	+	+	+
13	$SoP \equiv \rceil SaP \wedge SiS$	–	–	+	+	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$

4. Верхние и нижние грани Н и его подмножеств. Из таблицы 1 видно, что С4 является супремумом множества Н. Ниже будут описаны наибольшие из найденных мной нижних граней множества Н и некоторых его подмножеств (теории С, C_0, $C_{0.1}$, $C_{0.2}$, $C_{0.3}$). Доказательств, что эти системы являются инфинумами соответствующих множеств, пока нет. Для нахождения вышеназванных систем и унификации используемых аксиоматик пришлось несколько перестроить аксиоматику систем множества Н. В новых формулировках систем формулы 10-13 таблицы 1 заменены на более слабые. Результат переформулировки представлен в таблице 2.

Таблица 2.

N	Аксиомы	С1	С2	КС	БС	С3	С3.1	ФС	С4
1 – 7	формулы – также как в таблице 1.								

8	SoP ⊃ SiS	–	–	+	+	+	|–	+	+
9	SeP ⊃ SaS	–	–	–	+	–	+	+	|–
14	⌉SiP ∧ ⌉SiS ⊃ SeP	+	+	+	–	+	+	+	+
15	⌉SaP ∧ ⌉SiS ⊃ SoP	+	+	–	–	+	+	+	+
16	SeP ⊃ ⌉SiP	+	+	+	+	+	+	+	+
17	⌉SiP ∧ SiS ⊃ SeP	+	+	+	+	+	+	+	+
18	SoP ⊃ ⌉SaP	+	+	+	+	+	+	+	+
19	⌉SaP ∧ SiS ⊃ SoP	+	+	+	+	+	+	+	+

Формулы 1-3 и 16-19 задают систему С, являющуюся нижней гранью множества Н. Внизу указаны подмножества Н (слева) и наибольшие из найденных для них нижних граней (справа).

{C1, C2, C3, C3.1, КС, БС}	C_0 = C+(SaP ⊃ SiP)
{C2, КС, БС}	$C_{0.1}$ = C_0 + SiP⊃SiS + SiS⊃SaS
{C2, КС}	$C_{0.2}$ = $C_{0.1}$ + ⌉SiP∧⌉SiS⊃SeP
{КС, БС}	$C_{0.3}$ = $C_{0.1}$ + SoP⊃SiS

5. Граф силлогистик. На основании изложенных сравнений и изысканий я построил граф (см. рисунок 1), представляющий взаимоотношения между рассматриваемыми теориями. Вершины графа соответствуют силлогистическим теориям, а связи между ними – заданному отношению порядка. Теория С3.1 расположена на линии между С3 и С4. Пунктирные линии означают, что в местах их пересечения с другими линиями находятся теории, не рассмотренные мной.

На графе представлены некоторые расширения С4:

1) $C_=$=C4+SiP⊃SaP;
2) C(2)=$C_=$+SeM∧MeP⊃SaP.

Обсуждение этих теорий будет представлено в последних двух параграфах. С4 не является минимальной системой, достраивающейся до $C_=$ посредством (SiP⊃SaP), т. к. $C_=$ получается прибавлением (SiP⊃SaP) уже к теориям С3 и С3.1.

Можно также указать на несколько теорий, находящихся между С4 и $C_=$, например: (C4 + SaP⊃PaS), (C4 + MiP∧SiM⊃SiP), (C4 + SaP⊃PaS + SiM∧MiP⊃SiP). В первой предикатор “a”, во второй предикатор “i”, а в третьей оба предикатора выражают некоторые отношения эквивалентности, причем в последней теории эти отношения связаны законом подчинения (SaP⊃SiP).

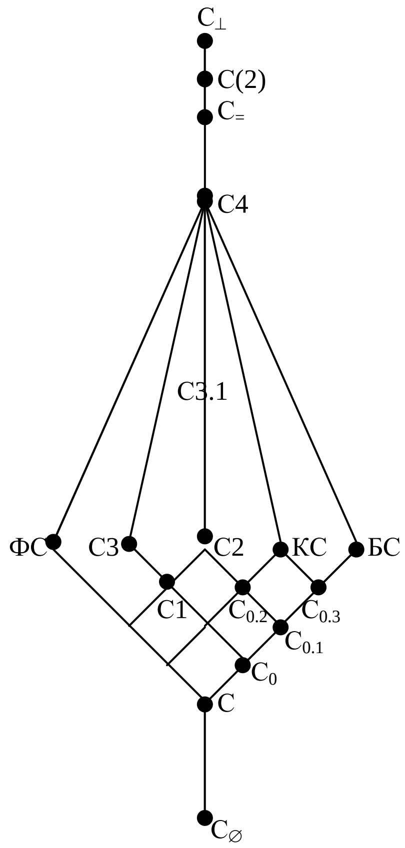

Рисунок 1.

6. Алгебры, решетки и классы теорий. Множество теорий, заданных в одном языке на базе классической логики, относительно операций min, max и особым образом определенного дополнения образуют брауэрову алгебру ([Смирнов 1987, стр. 32-34] со ссылкой на [Tarski 1956]). Множество таких конечно-аксиоматизируемых теорий относительно тех же операций образуют булеву алгебру. Относительно заданного нами порядка эти множества теорий образуют брауэрову и булеву решетку соответственно. Нулем и единицей этих структур являются теории $C_\varnothing$ и $C_\perp$.

В связи с исходными установками и построенной схемой можно поставить ряд задач, требующих своего решения.

1. Построение минимальной решетки (с единицей в С4), элементами которой были бы все теории из Н. Т.е. нахождение такой независимой аксиоматики С4, чтобы формулировки всех остальных теорий из Н получались из этой аксиоматики отбрасыванием тех или иных аксиом.
2. Определение количества содержательных или конечно-аксиоматизируемых формальных теорий, лежащих между теми или иными содержательными или формальными теориями, представленными на схеме. Например, известно по крайней мере две конечно-аксиоматизируемые теории между С1 и С2 и три – между С4 и $C_=$, но не известно сколько всего возможных конечно аксиоматизируемых теорий в этих множествах.

7. Окрестность теории относительно некоторой формулы. В процессе построения представленной на рисунке 1 схемы я сформулировал и использовал понятие, обозначенное мной как “*окрестность теории T относительно формулы A*” и “*A-окрестность T*”. Под этими терминами я понимал множество теорий, которые достраиваются до T прибавлением к их аксиоматикам в качестве аксиомы формулы A. Т.е. *A-окрестность T* есть множество $\{T_i / (T_i+A)=T\}$. Для множества $\{T_i / (T_i+A)=T\}$ теория T является супремумом. К задачам классификации относятся, в частности, поиск инфинума данной окрестности и определение ее мощности. Так, например, в SaS-окрестность C4 входят теории C1, C2, C3, C3.1, КС и БС (инфинум находится между C и C_0), а в SiS-окрестность C4 входят только C2, КС и БС (инфинум находится между C_0, $C_{0.1}$).

Основываясь на понятии окрестности, можно определить понятие *сильной независимости* для системы аксиом. Пусть теория T задается множеством аксиом (или схем аксиом) $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, тогда эта аксиоматика *независима в сильном смысле* е. и т. е. $\forall A_i$(теория $(T\text{–}A_i)$ является инфинумом A_i-окрестности T).

8. Теория $C_=$ и синтаксическая непротиворечивость. На рисунке 1 выше C4 расположена интересная теория $C_=$. Во-первых, $C_=$ указывает на связь силлогистических отношений a, i, e, o (понимаемых теоретико-множественно) с обычными отношениями множеств по объему. В теории $C_=$ предикаты a и i эквивалентны и представляют некоторое отношение равенства по объему. Предикаты e и o представляют отрицание a и i. Во-вторых, ссылкой на $C_=$ легко демонстрируется синтаксическая непротиворечивость теорий из H, что и будет показано в данном параграфе.

Лемма 1. $C4+SiP\supset SaP = C_{\varnothing}+\{SaS, SaP\supset PaS, SaM\wedge MaP\supset SaP, SiP\equiv SaP, SeP\equiv\rceil SiP, SoP\equiv\rceil SaP\}$.

МТ.1. $C_=$ – синтаксически непротиворечива.

Схема доказательства. Теория $C_{\varnothing}+\{SaM\wedge MaP\supset SaP, SaS, SaP\supset PaS\}$ синтаксически непротиворечива, иначе любая теория, содержащая ее в качестве своей подтеории, была бы также синтаксически противоречивой (т.е. наличие в теории отношения эквивалентности не делает ее синтаксически противоречивой). Добавляя к этой теории еще три аксиомы, вводящие предикатор i как синоним a, e как сокращение для отрицания i, и o как сокращение для отрицания a, т. е. $\{SiP\equiv SaP, SeP\equiv\rceil SiP, SoP\equiv\rceil SaP\}$. Очевидно, что если символы “i”, “e”, “o” не фигурировали в других дедуктивных постулатах системы (а в нашем случае это именно так), то полученная теория (т.е. $C_=$, согласно лемме 1) также синтаксически непротиворечива.

Следствие из МТ.1. Любая подтеория $C_=$ синтаксически непротиворечива.

9. Синтаксическая неполнота теорий множества H. Теория C(2). Наличие теории $C_=$ делает очевидной также синтаксическую неполноту теорий множества H (указывая на недоказуемые в C4 и ее подтеориях формулы, например, $SiP\supset SaP$, $SaP\supset PaS$, $SiM\wedge MiP\supset SiP$). Правда, сама $C_=$ также не является синтаксически полной, т.к. в ней из $SeM\wedge MeP$ не выводится ни SeP, ни SaP. Это указывает на пути ее дальнейшего синтаксического расширения. На рисунке 1 между $C_=$ и $C_{\perp}$ отмечена теория C(2), определенная как $(C_= + SeM\wedge MeP\supset SaP)$. C(2) и является, предположительно, синтаксически полным расширением $C_=$.

Литература

[Карпенко 1997] *А.С. Карпенко*, Классификация пропозициональных логик // Логические исследования. Вып. 4. М.: Наука, 1997.

[Карпенко 1999] *А.С. Карпенко*, Импликации следования, строгая, релевантная, интуиционистская и классическая и их взаимоотношения // Логические исследования. Вып. 6. М.: Наука, 1999.

[Маркин 1991] *В.И. Маркин*, Силлогистические теории в современной логике. М., 1991.

[Смирнов 1987] *В.А. Смирнов*, Логические методы анализа научного знания. М.: Наука, 1987.

[Tarski 1956] *A. Tarski*, Foundations of the calculus of system // Logic, semantics, metamathematics. Oxford, 1956.