

## Систематизация и количественный анализ множества формальных силлогистик с простыми «общими» терминами<sup>1</sup>

Шиян Т.А. Систематизация и количественный анализ множества формальных силлогистик с простыми «общими» терминами // Эпистемы – 3: Язык. Дискурс. Текст. Екатеринбург, 2004.

Сохранено с сайта: <http://taras-shiyan.narod.ru>.

E-mail: taras\_a\_shiyan@mail.ru.

*В первой половине статьи дается обзор теорий чистой позитивной силлогистики, строится их систематизация по дедуктивной силе (представлена в виде нескольких графов). Вторая половина статьи посвящена собственным расширениям традиционной силлогистики (системы С4 Лукасевича-Смирнова) и теории  $S_{=}$  (графический вариант теории эквивалентности). Особое внимание уделено теории  $S_{(1)}$ , являющейся первой из счетного ряда теорий, находящихся между  $S_{(1)}$  и  $S_{=}$ , показывается ее синтаксическая непротиворечивость, полнота и взаимопогружаемость с одним вариантом КЛВ. Строятся семантики для теорий  $S_{=}$ ,  $S_{(2)}$  и  $S_{(1)}$  и доказывается их семантическая адекватность. Строится счетный класс теорий с семантиками стандартного силлогистического вида.*

### 1. Очерк создания и исследования силлогистических теорий

Первая известная нам силлогистическая система – логика Аристотеля из Стагира (384–322 гг. до н.э.) [Аристотель 1978]. Аристотель строил систему чистой позитивной<sup>2</sup> модальной силлогистики. Теория выводов из негативных и сингулярных<sup>3</sup> высказываний описана им фрагментарно и была развита в последующие века. Современные исследователи [Бочаров 1984, с. 79-80; Маркин 1991] сходятся во мнении, что Аристотель в общем случае не принимал законы силлогистического тождества, тогда как многие античные и большинство средневековых логиков принимали эти законы в явном виде. Это позволяет говорить о существовании в поздней античности и средневековье двух различных силлогистических теорий: логики Аристотеля и “традиционной” силлогистики [Маркин 1991, с. 7-10]. Если на термины в аристотелевской логике наложить требование непустоты и неуниверсальности, то класс принимаемых в ней законов совпадет с классом законов традиционной логики.

С развитием математики начинаются попытки провести параллели между силлогистикой и новыми математическими теориями. В частности, такие попытки были предприняты Готфридом Вильгельмом Лейбницем (1646–1716) и братьями Иоганом (1667–1748) и Якобом (1654–1705) Бернулли [Bernoulli Jac. und Joh. 1685]. Лейбниц в разное время предлагал две трактовки категорических высказываний [Стяжкин 1967, с. 235], которые в современной символической алгебре множеств можно представить так (I, II):

I	II	III
$SaP \Leftrightarrow S \subseteq P$	$SaP \Leftrightarrow S \subseteq P \wedge S \neq \emptyset$	$SaP \Leftrightarrow S \subseteq P \wedge S \neq \emptyset$
$SiP \Leftrightarrow S \cap P \neq \emptyset$	$SiP \Leftrightarrow S \cap P \neq \emptyset$	$SiP \Leftrightarrow S \cap P \neq \emptyset$
$SeP \Leftrightarrow S \cap P = \emptyset$	$SeP \Leftrightarrow S \cap P = \emptyset \wedge S \neq \emptyset$	$SeP \Leftrightarrow S \cap P = \emptyset$

<sup>1</sup> © Шиян Т.А., 2002-2004.

<sup>2</sup> «Чистой» принято называть силлогистику только с общими терминами, «позитивной» – только с простыми терминами.

<sup>3</sup> Силлогистики с отрицательными и единичными терминами.

SoP  $\leftrightarrow$  S\P $\neq\emptyset$ SoP  $\leftrightarrow$  S\P $\neq\emptyset$ SoP  $\leftrightarrow$  S\P $\neq\emptyset$ 

Логику, реализующую первый подход Лейбница, вслед за Августом Де Морганом (1806–1871), принято называть фундаментальной силлогистикой<sup>4</sup>. Этот подход, помимо Де Моргана [De Morgan 1847], принимали Франц Brentano (1838–1917) [Brentano 1973], Джон Венн (1834–1923) [Venn 1894], Чарльз Сандерс Пирс (1839–1914) [Peirce 1881], Альфред Уайтхед (1861–1947) и Бертран Рассел (1872–1970) [Whitehead, Russell 1911–1913], Давид Гильберт (1862–1943) [Аккерман, Гильберт 1947]<sup>5</sup> и многие другие логики. Второй подход разрабатывал Бернард Больцано (1781–1848) ([Бочаров 1984, с. 91–92; Маркин 1991, с. 12–13] с ссылкой на [Федоров 1980]). Третью из приведенных трактовок предложил английский математик Чарльз Лютвидж Доджсон (C.L. Dodgson, 1832–1898), известный в основном под литературным псевдонимом “Льюис Кэрролл” [Кэрролл 1973]. Надо отметить, что на этом этапе изучение силлогистик шло параллельно с разработкой алгебры классов и алгебры логики, которые окончательно оформились в трудах Де Моргана [De Morgan 1847, 1860] и Джорджа Буля (1815–1864) [Boole 1847/1965, 1854/1953]. Следы этого параллелизма сохраняются очень долго и присутствуют, например, в изложении силлогистики в [Аккерман, Гильберт 1947].

В середине XIX – начале XX веков активно формируются новые математические дисциплины – теория множеств и символическая логика. Несмотря на это, новый этап в изучении силлогистики начинается только во второй половине XX века, после издания в 1951 году книги Яна Лукасевича (1878–1956) “Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики” [Лукасевич 1959]. Представленная в книге система является формализацией чистого позитивного фрагмента традиционной силлогистики (= системе С4 Смирнова [Смирнов 1980]). Аксиоматизация соответствующего фрагмента аристотелевской логики (система С2) впоследствии была осуществлена В.А. Смирновым (1931–1996) [Смирнов 1980]. Аксиоматизация чистых позитивных фрагментов фундаментальной силлогистики была осуществлена И. Бохеньским [Bochenski 1948/1962], силлогистик Больцано (БС) и Кэрролла (КС) В.И. Маркиным [Маркин 1983]. Кроме того, были сформулированы новые теории С1 (Слупецкий, Смирнов), С3 (Смирнов), С3.1 (= С3<sup>+</sup>; Мчедлишвили, Смирнов, Маркин) и др. ([Мчедлишвили 1986], [Маркин 1991], [Смирнов 1994], [Шиян 2000]). С построением дедуктивно не эквивалентных друг другу силлогистических исчислений ясно осознается факт существования большого числа альтернативных силлогистических теорий.

Другим событием, давшим толчок новому этапу изучения силлогистик, явилась публикация работ, посвященных сравнению формальных теорий.<sup>6</sup> Предложенные в этих работах методы дали возможность не только сравнить выразительные и дедуктивные возможности различных теорий, но и прояснить смысл силлогистических констант в этих теориях. Обычно для этого пользовались двумя методами: методом погружающих операций и методом дефинициальных расширений. Наиболее полный

<sup>4</sup> Де Морган предложил называть фундаментальными те силлогизмы, посылки которых не сильнее, чем требуется для заключения [Бочаров 1984, с. 89].

<sup>5</sup> Гильберт, например, понимал, что такая трактовка отличается от аристотелевской, но считал, что для математической работы более удобен «фундаментальный» вариант силлогистики: «Однако нашим методом мы не воспроизводим всех аристотелевых способов умозаключения. <...> Наше отклонение от Аристотеля в этом пункте оправдывается потребностями математических применений логики, где класть в основу аристотелево понимание было бы не целесообразно».

<sup>6</sup> См., например, [Tarski 1956] и [Смирнов 1987/2002].

обзор результатов, полученных сравнением силлогистических теорий (методами сравнения по дедуктивной силе, погружающих операций и дефинициальных расширений) см. в [Шиян 2002].

К настоящему времени в литературе описано несколько десятков силлогистических теорий и далеко не всегда очевидно их соотношение друг с другом. Кроме того, иногда в работах даже одного автора одним и тем же знаком обозначаются разные теории или, наоборот, одна и та же теория обозначается по-разному<sup>7</sup>. Таким образом, обзор и систематизация построенных теорий является насущной задачей для более эффективной ориентации в материале и интенсификации дальнейших исследований.

В статье освещаются следующие темы:

1. обзор формальных силлогистик и их структурная систематизация;
2. синтаксические непротиворечивость и полнота одного собственного расширения  $S_4$  (теория  $C_{(1)}$ ), взаимная погружаемость  $C_{(1)}$  и одного варианта классической логики высказываний (КЛВ);
3. построение адекватных семантик для  $C_{=}$ ,  $C(2)$ ,  $C_{(1)}$ ;
4. задание счетного класса силлогистических теорий (включающего  $C_{(1)}$  и  $C(2)$ ) и адекватных им семантик.

## 2. Язык; формальные теории и принципы их систематизации

Здесь я собираюсь дать обзор формальных силлогистик с простыми «общими» терминами (т.н. чистых позитивных силлогистик). Язык рассматриваемых теорий состоит из:

- a) логических констант:  $\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv$ ;
- b) двухместных предикаторов:  $a, e, i, o$  (понимаемых как силлогистические константы);
- c) бесконечного списка постоянных термов (параметров):  $S, P, M, S_1; P_1, M_1, \dots$  (понимаемых как силлогистические термины);
- d) круглых скобок.

### Высказывания:

- a) выражения типа  $\alpha_1 * \alpha_2$ , где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – некоторые термы и  $*$  – некоторая силлогистическая константа;
- b) выражения, правильно построенные из других высказываний посредством логических констант.

*Элементарными* буду называть высказывания, соответствующие пункту a), и, в зависимости от использованной константы, буду говорить о них как о высказываниях типа A, I, E, O.

Разные авторы для формулировки одних и тех же теорий используют более или менее различающиеся между собой языки: используются разные значки конъюнкции («&» и « $\wedge$ »), разные буквы для терминов<sup>8</sup>, для силлогистических констант<sup>9</sup>, по-разному записываются элементарные силлогистические высказывания<sup>10</sup>. Безусловно, все это разные алфавиты и языки, с точки зрения современного семиотического

<sup>7</sup> Например, у В.И. Маркина: «ОФС» (обобщенная фундаментальная силлогистики) в работах [Маркин 1991] и [Маркин 1998] обозначает совершенно разные теории; наоборот, считавшиеся в [Маркин 1991] разными системы  $S3.1$  и  $S3^+$  впоследствии оказались одной и той же формальной теорией (доказательство см. ниже).

<sup>8</sup>  $S, P, M, S_1; P_1, M_1, \dots$  (Смирнов, Маркин);  $s, p, m, s_1; p_1, m_1, \dots$  [Бочаров 1984];  $A, B, \dots$  [Мчедlishvili 1986];  $a, b, c, d, \dots$  [Попов 1997].

<sup>9</sup>  $A, E, I, O$  (Смирнов, Бочаров);  $a, e, i, o$  (Маркин).

<sup>10</sup> Например,  $ASP, ESP, ISP, OSP$  (Смирнов) и  $SaP, SeP, SiP, SoP$  (Маркин).

сознания. Но различия эти чисто графические, и мы можем отождествить соответствующие друг другу значки и выражения (как мы отождествляем буквы, не обращая внимания на особенности шрифта или подчеркика). Собственно, в современной математике достаточно распространена подобная практика и существует даже специальный значок (графически равно) для подобных отождествлений. В принципе, мы можем нашу отождествляющую деятельность формально оформить в виде некоторой функции отождествления (например,  $\epsilon$ ). В этом случае, мы можем явно говорить, что рассматриваем теории, сформулированные в одном относительно функции  $\epsilon$  языке. Я буду иметь в виду именно это.

Далее я буду рассматривать не конкретные исчисления, а задаваемые ими формальные теории. Это дает нам инвариантность относительно того или иного способа формализации теории (но не инвариантность относительно языка формализации). Под формальной теорией, вслед за Тарским [Tarski 1956], понимают дедуктивно замкнутое множество формул<sup>11</sup>. Мне для дальнейшей работы достаточно понимания, что формальная теория – множество теорем, задаваемое некоторым исчислением (формальной системой). Конкретные исчисления, таким образом, будут использоваться лишь для выделения того или иного множества формул (теорем).

Раз формальные теории – множества, то между ними можно установить обычные теоретико-множественные отношения:  $\subseteq$ ,  $\subset$ ,  $=$ . А поскольку формальная теория есть множество теорем, то эти отношения соответствуют соотношению теорий по дедуктивной силе. Таким образом, множество формальных теорий естественно упорядочивается отношением  $\subseteq$  ( $\subset$ ).

Большинство известных теорий задается с помощью тех или иных исчислений. Здесь возникают некоторые технические трудности при сравнении теорий, сформулированных с помощью разных правил вывода. В ряде случаев сравнение по дедуктивной силе можно существенно упростить применением «косвенных» методов сравнения. Одним из таких способов является применение погружающих операций.

**Df.2.1.** Функция  $\eta$ , сопоставляющая каждой формуле языка  $L_1$  некоторую формулу языка  $L_2$ <sup>12</sup>, погружает теорию  $T_1$  (в языке  $L_1$ ) в  $T_2$  (в языке  $L_2$ ) е.т.е. для всякой формулы  $A$  языка  $L_1$  верно, что  $\vdash_{T_1} A \Leftrightarrow \vdash_{T_2} \eta(A)$ .

**Лемма 2.1 (о равенстве двух теорий).** Пусть  $T_1$  и  $T_3$  сформулированы в  $L_1$ ,  $T_2$  сформулирована в  $L_2$ , и  $\eta$  погружает в  $T_2$  как  $T_1$ , так и  $T_3$ . Иначе говоря, для всякой формулы  $A$  языка  $L_1$  верно, что  $\vdash_{T_1} A \Leftrightarrow \vdash_{T_2} \eta(A)$  и  $\vdash_{T_3} A \Leftrightarrow \vdash_{T_2} \eta(A)$ . Отсюда получаем, что для всякой формулы  $A$  языка  $L_1$  верно  $\vdash_{T_1} A \Leftrightarrow \vdash_{T_3} A$ , т.е.  $T_1=T_3$ .

Частным случаем этого метода является сравнение через построение семантики. Здесь в качестве погружающей операции выступает функция приписывания значений формулам языка. Семантическая адекватность (непротиворечивость и полнота) теории  $T$  относительно семантики  $M$  означает, что множество доказуемых в  $T$  формул равно множеству формул, общезначимых в  $M$  ( $T=M$ ).

---

<sup>11</sup> Множество формул некоторого формального языка, замкнутое относительно некоторых правил вывода. Минимальным требованием выдвигают обычно замкнутость относительно стандартных правил подстановки. Варьируя правила вывода и постулаты о наличии в множестве тех или иных формул (аксиомы и схемы аксиом), получаем различные замкнутые классы формул (формальные теории).

<sup>12</sup>  $L_1$  и  $L_2$  могут и совпадать.

**Лемма 2.2 (о равенстве двух теорий).** Пусть  $T_1$  и  $T_2$  сформулированы в одном языке и имеют одну и ту же адекватную семантику  $M$ . Иначе говоря,  $T_1=M$  и  $T_2=M$ , следовательно,  $T_1=T_2$ .

Формальный язык можно отождествить с множеством правильно построенных формул (ППФ). В таком случае язык совпадает по объему с противоречивой теорией, сформулированной в этом языке. Обозначу такую теорию как  $C_{\perp}$ .

Выберем некоторую формулировку классической логики высказываний (КЛВ) со схемами аксиом или натурального типа (единственное требование – наличие правила *modus ponens*) и добавим к ней правило подстановки для термов. Эту теорию обозначу как  $C_{\emptyset}$ .

Все остальные системы получаются присоединением к  $C_{\emptyset}$  тех или иных аксиом или схем аксиом<sup>13</sup>. Факт присоединения к системе  $T$  аксиомы (или аксиомной схемы)  $A$  буду обозначать  $T+A$ .

Множество конечноаксиоматизируемых теорий, сформулированных в одном языке на базе классической логики высказываний, относительно выбранного нами порядка образует булеву решетку с нулем  $C_{\emptyset}$  и единицей  $C_{\perp}$ .

Для представления соотношения теорий по дедуктивной силе удобно применять «язык» графов. Вершины графа соответствуют формальным теориям, связи соединяют ближайшие теории, сравнимые по заданному порядку. Направление связей показывается стрелками или (более удобно для восприятия) расположением теорий на схеме по высоте, например, более слабые теории – ниже, более сильные – выше.

### 3. Обзор и систематизация формальных силлогистик

В [Шиян 2000] рассматривались восемь теорий, описанных В.И. Маркиным в [Маркин 1991]. Это формализации чистых позитивных фрагментов логик Аристотеля (С2), Больцано (БС), Кэрролла (КС), фундаментальной (ФС) и традиционной (С4) силлогистик, а также теории С1, С3 и С3.1 (=С3<sup>+</sup> [Мчедlishvili 1986, Маркин 1998]).

В таблице внизу указано какие аксиомы надо добавить к  $C_{\emptyset}$  для получения той или иной из этих теорий. Знак “+” в таблице означает, что формула данной строки является аксиомой указанной в столбце системы; “|–” – что формула не является аксиомой, но доказуема в данной системе; “–” – что формула не является теоремой.

Таблица 1.

N	Аксиомы	С1	С2	КС	БС	С3	С3.1	ФС	С4
1	$(SaM \wedge MaP) \supset SaP$	+	+	+	+	+	+	+	+
2	$(SaM \wedge MeP) \supset SeP$	+	+	+	+	+	+	+	+
3	$SiP \supset PiS$	+	+	+	+	+	+	+	+
4	$SaP \supset SiP$	+	+	+	+	+	+	–	+
5	$SiP \supset SiS$	–	+	+	+	–	–	+	–
6	$SiS \supset SaS$	–	+	+	+	–	–	+	+
7	$SaP \supset (SaS \wedge PaP)$	–	–	–	–	–	+	–	–
8	$SoP \supset SiS$	–	–	–	–	+	–	+	+
9	$SeP \supset SaS$	–	–	–	–	–	+	+	–
10	$SeP \equiv \neg SiP$	+	+	+	–	+	+	+	+
11	$SeP \equiv \neg SiP \wedge SiS$	–	–	–	+	–	–	–	–
12	$SoP \equiv \neg SaP$	+	+	–	–	+	+	+	+
13	$SoP \equiv \neg SaP \wedge SiS$	–	–	+	+	–	–	–	–

<sup>13</sup> В случае схем аксиом правило подстановки не нужно.



Теория  $C_{=}$  имеет по крайней мере счетный класс расширений, что также будет показано в данной работе (идея построения этого класса была описана в [Шиян 2002, С. 32]).

Из расширений  $C_{=}$  ранее описывалась теория  $C(2)$  [Шиян 2000]. Она получается из  $C_{=}$  добавлением аксиомы  $SeM \wedge MeP \supset SaP$  и адекватна семантике для  $C_{=}$  с дополнительным условием  $\forall S \forall P \forall Q (\varphi(S) = \varphi(P) \vee \varphi(S) = \varphi(Q) \vee \varphi(P) = \varphi(Q))$  (доказательство см. ниже).

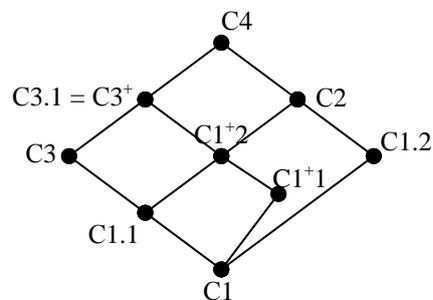
**Силлогистики аристотелевского типа.** В литературе описан еще ряд расширений  $C1$  (так называемых теорий аристотелевского типа). Кроме упомянутых выше ( $C1$ ,  $C2$ ,  $C3$ ,  $C3.1$  и  $C4$ ) это две теории  $C1^+$  [Мчедlishvili 1986, Маркин 1991] и две безымянные подтеории  $C2$ , упоминавшиеся, например, в [Смирнов 1994].

Теория  $C1 + SiP \supset SiS$ , по мнению Смирнова, в каком-то смысле эквивалентна построенной им теории  $CVA$ , формализующей силлогистику Н.А. Васильева при акцидентальной трактовке категорических суждений [Смирнов 1994, С. 13]. Обозначу эту теорию  $C1.1$ .

Вторую теорию:  $C1 + SiS \supset SaS$ , – обозначу  $C1.2$ . Она (как и  $C2$ ) обладает одним интересным свойством:  $C1.2$  полна относительно формул вида  $\sim S * S$ <sup>15</sup>. Для каждого терма могут быть истинными только четыре формулы указанного вида (по одной на каждый предикат). В  $C1.2$  и  $C2$  ни одна формула указанного вида не является теоремой, но истинность (ложность) одной из них детерминирует истинность (ложность) остальных.

Теперь можно построить граф силлогистик аристотелевского типа.

В таблице 3 указано какие аксиомы и правила вывода нужно присоединить к  $C1$ , чтобы получить ту или иную теорию из графа 2. Теории  $C1^+$ : 1 – [Мчедlishvili 1986, Смирнов 1987], 2 – [Маркин 1991, 1998].



**Граф 2.** Силлогистики аристотелевского типа.

**Таблица 3.**

N	Аксиомы	C1	C1.1	C1 <sup>+</sup>		C3	C3.1 = C3 <sup>+</sup>	C1.2	C2	C4
				1	2					
1	SiP $\supset$ SiS	-	+	-	+	-	-	-	+	-
2	SiS $\supset$ SaS	-	-	-	-	-	-	+	+	+
3	SaP $\supset$ (SaS $\wedge$ PaP)	-	-	+	+	-	+	-	-	-
4	SeP $\supset$ SaS	-	-	-	-	-	+	-	-	-
5	(SeP $\wedge$ PiP $\wedge$ PoP) $\supset$ SeS	-	-	-	+	-	-	-	-	-
6	SiS	-	-	-	-	+	-	-	-	+

Как видно из таблицы, обе теории  $C1^+$  являются подтеориями  $C2$ .

В [Маркин 1991] заданы два исчисления с дополнительными правилами вывода:  $C1^+$  и  $C3^+$ . Опираясь на лемму 2.1 нетрудно показать, что  $C3^+$  совпадает с теорией  $C3.1$  из той же работы, а дополнительное правило в формулировке  $C1^+$  не расширяет множества доказуемых формул и может быть выкинуто ( $C1^+$  [Маркин 1991] примет вид  $C1^+2$  из таблицы 3).

<sup>15</sup> \* – один из предикаторов теории (силлогистических констант),  $\sim A$  означает  $A$  или  $\neg A$ .



теорий. Теория C2.1 дефинициально эквивалентна C2. Иначе говоря, если язык C2.1 расширить связками е и о и добавить аксиомы (или схемы аксиом, или определения)  $(SeP \equiv \neg SiP)$  и  $(SoP \equiv \neg SaP)$ , то получим C2. C2.1 представляет собой реконструкцию n-мерной логики Н.А. Васильева при n=1, C2 – при n=2 [Смирнов 1987/2002, с. 180].

C2.1 расширяется до нижней полурешетки с нулем и до квазибулевой алгебры (оба результата см. в [Смирнов 1987/2002, с. 178] с ссылкой на В.М. Попова). Поскольку C2.1 расширяется до C2, а C2 – до булевой алгебры, то и C2.1 расширяется до булевой алгебры.

#### 4. Семантика для ФС и дедуктивная эквивалентность двух формулировок ФС

Семантика для ФС мне понадобится дальше в качестве основы для семантик адекватных системам  $C_{=}$ ,  $C(2)$  и  $C(1)$ . Сформулирую ее несколько раньше, чтобы использовать в доказательстве дедуктивной эквивалентности двух формулировок ФС. Выше я задавал ФС тем же способом, что и в [Маркин 1991]. Разница в нескольких аксиомах, но эквивалентность этой замены легко показать. Сложнее показать эквивалентность этих формулировок и формулировки, данной в [Маркин 1986], т.к. там использовалось дополнительное правило вывода эктетического типа. Показать дедуктивную эквивалентность этих формулировок можно способом, похожим на примененный выше для теорий  $C1^+$  и  $C3^+$ . Разница состоит в том, что в качестве погружающей функции здесь будет использоваться функция приписывания значений формулам языка.

В [Маркин 1991] построена следующая семантика для ФС и доказана ее адекватность [Маркин 1991, с. 20-25]. Моделью является упорядоченная пара  $\langle D, \varphi \rangle$ , где  $D$  – произвольное непустое множество и  $\varphi$  – функция, сопоставляющая постоянным термам языка (силлогистическим терминам) подмножества  $D$ . Функция  $||\varphi^D$  (или  $||$  – при фиксированной модели) приписывает формулам языка истинностные значения на множестве  $\{0, 1\}$ . Истинность в модели определяется так:

$$\begin{aligned} |SaP|=1 &\Leftrightarrow \varphi(S) \subseteq \varphi(P), \\ |SiP|=1 &\Leftrightarrow \varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \emptyset, \\ |SeP|=1 &\Leftrightarrow \varphi(S) \cap \varphi(P) = \emptyset, \\ |SoP|=1 &\Leftrightarrow \varphi(S) \setminus \varphi(P) \neq \emptyset, \\ |\neg A|=1 &\Leftrightarrow |A|=0, \\ |A \wedge B|=1 &\Leftrightarrow |A|=1 \ \& \ |B|=1, \\ |A \vee B|=1 &\Leftrightarrow |A|=1 \ \vee \ |B|=1, \\ |A \supset B|=1 &\Leftrightarrow |A|=0 \ \vee \ |B|=1, \\ |A \equiv B|=1 &\Leftrightarrow |A \supset B|=1 \ \& \ |B \supset A|=1. \end{aligned}$$

Формула  $A$  общезначима е.т.е. она истинна в любой модели указанного типа (буду обозначать:  $M_{\text{ФС}} \models A$ ).

Семантика предложенная для ФС в [Маркин 1986] отличается от этой только условием для  $O$ :

$$|SoP|=1 \Leftrightarrow \varphi(S) \cap (D \setminus \varphi(P)) \neq \emptyset.$$

Легко показать эквивалентность этих формулировок:

$$\varphi(S) \cap (D \setminus \varphi(P)) \neq \emptyset \Leftrightarrow \varphi(S) \cap (D \cap \varphi(P)') \neq \emptyset \Leftrightarrow (\varphi(S) \cap \varphi(P)') \cap D \neq \emptyset \Leftrightarrow (\varphi(S) \setminus \varphi(P)) \cap D \neq \emptyset$$

Но  $\varphi(S) \setminus \varphi(P) \subseteq D$  и  $D \neq \emptyset$ , следовательно,  $(\varphi(S) \setminus \varphi(P)) \cap D \neq \emptyset \Leftrightarrow \varphi(S) \setminus \varphi(P) \neq \emptyset$ . Отсюда  $\varphi(S) \cap (D \setminus \varphi(P)) \neq \emptyset \Leftrightarrow \varphi(S) \setminus \varphi(P) \neq \emptyset$ .

Следовательно, мы имеем эквивалентные формулировки одной и той же семантики, выделяющие одно и то же множество общезначимых формул. Обозначу его  $M_{\text{ФС}}$ . Множество формул, задаваемое формулировкой ФС в [Маркин 1991] (и

формулировкой в данной статье), обозначу  $\Phi C(1)$ , а множество формул, задаваемое формулировкой  $\Phi C$  в [Маркин 1986], обозначу  $\Phi C(2)$ .

1. Теория  $\Phi C(1)$  адекватна предложенной семантике [Маркин 1991, с. 20-25], т.е.  $\Phi C(1)=M_{\Phi C}$ .
2. Теория  $\Phi C(2)$  адекватна предложенной семантике [Маркин 1986, с. 92], т.е.  $\Phi C(2)=M_{\Phi C}$ .
3.  $\Phi C(1)=\Phi C(2)$  – из 1 и 2.

Т.е. формулировки  $\Phi C$  в [Маркин 1986] и [Маркин 1991] задают одну и ту же формальную теорию.

Отличие семантики для  $\Phi C$  от традиционной семантики для  $C2$  и  $C4$  состоит в трактовке высказываний типа  $A$  и  $O$ , но при непустоте терминов (стандартного условия для  $C4$ ) очевидно, что

$$\begin{aligned} \varphi(S) \subseteq \varphi(P) &\Leftrightarrow (\varphi(S) \subseteq \varphi(P) \ \& \ \varphi(S) \neq \emptyset) \text{ (для } A), \\ \varphi(S) \setminus \varphi(P) \neq \emptyset &\Leftrightarrow (\varphi(S) \setminus \varphi(P) \neq \emptyset \vee \varphi(S) = \emptyset) \text{ (для } O). \end{aligned}$$

Требование неуниверсальности терминов традиционной силлогистики начинает работать при переходе к негативной силлогистике и для  $C4$  может быть опущено.

## 5. Теория $C_{(1)}$ , ее синтаксические непротиворечивость и полнота

В ходе работ по подготовке графа, описанного в [Шиян 2000] (его дополненный вариант – граф 1), возник вопрос о синтаксически полном расширении  $C4$ . Ни теория  $C_{=}$ , ни  $C(2)$  не являются синтаксически полными. В результате поисков была сформулирована теория  $C_{(1)}$ , получающаяся из  $C_{=}$  добавлением аксиомы  $SaP$ <sup>16</sup>. Покажу синтаксические непротиворечивость и полноту  $C_{(1)}$ , доказательство будет проводиться методом погружающих операций.

Рассмотрим теорию  $TF$ , формализующую КЛВ (классическую логику высказываний) в алфавите  $\{t, f; \neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv\}$ . Теорию естественно задать, добавив к произвольному классическому пропозициональному исчислению (натуральному, со схемами аксиом или секвенциальному) утверждений  $\vdash_{TF} t$  и  $\vdash_{TF} (t \equiv \neg f)$  (в виде аксиом, схем аксиом или правил вывода).

**Непротиворечивость  $TF$**  очевидна. Возьмем некоторую формулировку КЛВ в обычном пропозициональном языке. Расширим язык пропозициональными символами  $t$  и  $f$ . Определим  $t$  как сокращение для  $(p \vee \neg p)$  и  $f$  как сокращение для  $(p \wedge \neg p)$ . Полученная теория синтаксически непротиворечива. Формулы  $t$ ,  $\neg f$  и  $(t \equiv \neg f)$  доказуемы в получившемся исчислении и тождественно истинны в классической семантике. Множество теорем этой теории, не содержащих других пропозициональных символов кроме  $t$  и  $f$ , совпадает с теорией  $TF$ .

В дальнейшем мне потребуются утверждения:

- a) теория  $TF$  – синтаксически непротиворечива;
- b)  $\vdash_{TF} t, \neg f$ ;
- c)  $\forall A \in L(TF)$ <sup>17</sup> ( $\vdash_{TF} A \vee \vdash_{TF} \neg A$ ).

Последнее утверждение вытекает из утверждения b) леммы 5.1. Пусть  $T$  – теория, построенная на базе классической логики высказываний в языке без кванторов, и для всякой атомарной формулы языка этой теории верно, что либо она сама, либо ее отрицание доказуемы в  $T$ . Тогда верно следующее утверждение.

<sup>16</sup> На самом деле  $SaP$  – очень сильная формула и ее принятие делает зависимыми многие аксиомы. Так, для получения  $C_{(1)}$  достаточно, кроме  $SaP$ , иметь аксиомы:  $SaP \supset SiP$ ,  $SaP \supset \neg SoP$ ,  $SaP \supset \neg SeP$ .

<sup>17</sup> Здесь и далее: если  $T$  – некоторая формальная теория, то  $L(T)$  – язык этой теории.

**Лемма 5.1.**  $\forall A \in L(T) (\vdash A \vee \vdash \neg A)$ .

1. Если  $A$  – атомарная формула, то утверждение леммы верно по условию.
2. Допустим, что утверждение леммы верно для  $B$  и  $C$ .
3.  $A$  – формула вида  $\neg B$ :
  1.  $\vdash B \vee \vdash \neg B$  – по индуктивному предположению;
  2.  $B \equiv \neg \neg B$  – закон КЛВ;
  3.  $\vdash \neg \neg B \vee \vdash \neg B$  – из 3.1 и 3.2.
4.  $A$  – формула вида  $B \wedge C$ :
  1.  $\vdash B$  &  $\vdash C$  – предположение;
  2.  $\vdash B \wedge C$  – из 4.1;
  3.  $\vdash \neg B \vee \vdash \neg C$  – предположение;
  4.  $\vdash \neg B \vee \vdash \neg C$  – из 4.3;
  5.  $\vdash \neg(B \wedge C)$  – из 4.4;
  6.  $\vdash B \wedge C \vee \vdash \neg(B \wedge C)$  – из 4.2, 4.5 и закона искл. 3-го.
5.  $A$  – формула вида  $B \vee C$ :
  1.  $\vdash B \vee \vdash C$  – предположение;
  2.  $\vdash B \vee C$  – из 5.1;
  3.  $\vdash \neg B$  &  $\vdash \neg C$  – предположение;
  4.  $\vdash \neg B \wedge \neg C$  – из 5.3;
  5.  $\vdash \neg(B \vee C)$  – из 5.4;
  6.  $\vdash B \vee C \vee \vdash \neg(B \vee C)$  – из 4.2 и 4.5.
6.  $A$  – формула вида  $B \supset C$  – доказывается аналогично.
7.  $A$  – формула вида  $B \equiv C$  – доказывается аналогично.
8. Индукцией по пунктам определения ППФ показано, что  $\vdash A \vee \vdash \neg A$  для любой ППФ языка теории  $T$ .

Построим перевод  $\psi$  из  $L(C_{(1)})$  в  $L(TF)$ :

- 1)  $\psi(SaP) = t$ , для любых  $S$  и  $P$ ;
- 2)  $\psi(SiP) = t$ , для любых  $S$  и  $P$ ;
- 3)  $\psi(SoP) = f$ , для любых  $S$  и  $P$ ;
- 4)  $\psi(SeP) = f$ , для любых  $S$  и  $P$ ;
- 5)  $\psi(\neg A) = \neg \psi(A)$ ;
- 6)  $\psi(A * B) = \psi(A) * \psi(B)$ , где  $*$  – 2-х местная пропозициональная связка.

Покажу теперь, что функция  $\psi$  является погружающей операцией, т.е.  $\forall A (\vdash_{C_{(1)}} A \Leftrightarrow \vdash_{TF} \psi(A))$ .

**Лемма 5.2.**  $\forall A (\vdash_{C_{(1)}} A \Leftrightarrow \vdash_{TF} \psi(A))$ .

1.  $\vdash_{C_{(1)}} SaP, SiP, \neg SoP, \neg SeP$  (следует из определения  $C_{(1)}$  и свойств  $C_{=}$ );
2. если  $A$  – элементарная силлогистическая формула, то лемма очевидна из 1, пунктов 1-4 определения  $\psi$  и утверждения b);
3. пусть утверждение леммы доказано для формул  $B$  и  $C$ ;
4.  $\vdash_{C_{(1)}} \neg B \Leftrightarrow \sim(\vdash_{C_{(1)}} B) \Leftrightarrow \sim(\vdash_{TF} \psi(B)) \Leftrightarrow \vdash_{TF} \neg \psi(B) \Leftrightarrow \vdash_{TF} \psi(\neg B)$ ;
5.  $\vdash_{C_{(1)}} B \wedge C \Leftrightarrow \vdash_{C_{(1)}} B$  &  $\vdash_{C_{(1)}} C \Leftrightarrow \vdash_{TF} \psi(B)$  &  $\vdash_{TF} \psi(C) \Leftrightarrow \vdash_{TF} \psi(B) \wedge \psi(C) \Leftrightarrow \vdash_{TF} \psi(B \wedge C)$ ;
6.  $\vdash_{C_{(1)}} B \vee C \Leftrightarrow \vdash_{C_{(1)}} \neg(\neg B \wedge \neg C) \Leftrightarrow \vdash_{TF} \psi(\neg(\neg B \wedge \neg C)) \Leftrightarrow \vdash_{TF} \neg \psi(\neg B \wedge \neg C) \Leftrightarrow \vdash_{TF} \neg(\psi(\neg B) \wedge \psi(\neg C)) \Leftrightarrow \vdash_{TF} \neg(\neg \psi(B) \wedge \neg \psi(C)) \Leftrightarrow \vdash_{TF} \psi(B) \vee \psi(C) \Leftrightarrow \vdash_{TF} \psi(B \vee C)$ ;

7.  $\vdash_{C(1)} B \supset C \Leftrightarrow \vdash_{C(1)} \neg B \vee C \Leftrightarrow \vdash_{TF} \psi(\neg B \vee C) \Leftrightarrow \vdash_{TF} \psi(\neg B) \vee \psi(C) \Leftrightarrow \vdash_{TF} \neg \psi(B) \vee \psi(C) \Leftrightarrow \vdash_{TF} \psi(B) \supset \psi(C) \Leftrightarrow \vdash_{TF} \psi(B \supset C)$ ;
8.  $\vdash_{C(1)} B \equiv C \Leftrightarrow \vdash_{TF} \psi(B \equiv C)$  – доказывается аналогично, используя соответствие  $B \equiv C \Leftrightarrow (B \supset C \wedge C \supset B)$ ;
9. индукцией по пунктам определения ППФ показано, что  $\vdash_{C(1)} A \Leftrightarrow \vdash_{TF} \psi(A)$  для любой ППФ языка теории  $C(1)$ .

**Теорема 5.1.** Теория  $C(1)$  равнонепротиворечива с TF.

Равнонепротиворечивость  $C(1)$  и TF следует из погружаемости  $C(1)$  в TF: если  $C(1)$  – противоречива и существует такая формула  $A$ , что  $\vdash_{C(1)} A$  и  $\vdash_{C(1)} \neg A$ , то, по лемме 5.2, получаем, что  $\vdash_{TF} \psi(A)$  и  $\vdash_{TF} \psi(\neg A)$ . Отсюда:  $\vdash_{TF} \psi(A)$  и  $\vdash_{TF} \neg \psi(A)$ , – следовательно, теория TF противоречива. По контрпозиции получаем, что если TF непротиворечива, то не противоречива и  $C(1)$ .

**Теорема 5.2.** Теория  $C(1)$  – синтаксически непротиворечива. Это следует из теоремы 5.1 и утверждения а).

**Теорема 5.3.** Теория  $C(1)$  – синтаксически полна.

Теория T синтаксически полна е.т.е. T – синтаксически непротиворечива и  $\forall A (A \notin T \Rightarrow (T+A \text{ – синтаксически противоречива}))$ .

1. Все формулы вида SaP, SiP,  $\neg$ SoP,  $\neg$ SeP являются теоремами  $C(1)$ ;
2. для всякой формулы верно, что либо она сама, либо ее отрицание доказуемо в  $C(1)$  – из 1, лемма 5.1;
3.  $\sim(\vdash_{C(1)} A)$  – предположение;
4.  $C(1)+A \vdash A$  – по построению ( $C(1)+A$ );
5.  $C(1) \vdash \neg A$  – из 2, 3;
6.  $C(1)+A \vdash \neg A$  – из 5, по построению ( $C(1)+A$ );
7. ( $C(1)+A$  – синтаксически противоречива) – из 4, 6;
8. ( $A \notin C(1) \Rightarrow (C(1)+A \text{ – синтаксически противоречива})$ ) – из 7, введение импликации; шаги 3-7 исключены;
9.  $\forall A (A \notin C(1) \Rightarrow (C(1)+A \text{ – синтаксически противоречива}))$  – из 8, введение квантора общности;
10. ( $C(1)$  – синтаксически непротиворечива) – теорема 5.2;
11. ( $C(1)$  – синтаксически полна) – из 9, 10 и определения синтаксической полноты.

Очевидно, что TF также синтаксически полна.

**Теорема 5.4.** Теории  $C(1)$  и TF – взаимно погружаемы. Утверждение теоремы следует из лемм 5.2 и 5.3.

Построим перевод  $\theta$  из  $L(TF)$  в  $L(C(1))$ :

1.  $\theta(t) = SaP$ , для фиксированных S и P;
2.  $\theta(f) = SeP$ , для фиксированных S и P;
3.  $\theta(\neg A) = \neg \theta(A)$ ;
4.  $\theta(A * B) = \theta(A) * \theta(B)$ , где \* – 2-х местная пропозициональная связка.

**Лемма 5.3.**  $\forall A (\vdash_{TF} A \Leftrightarrow \vdash_{C(1)} \theta(A))$ .

Доказательство полностью аналогично доказательству леммы 5.2.

1.  $\vdash_{TF} t, \neg f$  – утверждение б) из пункта 2;

2.  $\vdash_{C(1)} SaP, \neg SeP$  – для любых  $S$  и  $P$ , а значит и для фиксированных в определении  $\theta$ ;
3. Если  $A$  – истинностная константа  $t$  или  $f$ , то лемма очевидна из 1, 2 и пунктов 1-2 определения  $\theta$ ;
4. Пусть утверждение леммы доказано для формул  $B$  и  $C$ ;
5.  $\vdash_{TF} \neg B \Leftrightarrow \sim(\vdash_{TF} B) \Leftrightarrow \sim(\vdash_{C(1)} \theta(B)) \Leftrightarrow \vdash_{C(1)} \neg \theta(B) \Leftrightarrow \vdash_{C(1)} \theta(\neg B)$ ;
6.  $\vdash_{TF} B \wedge C \Leftrightarrow \vdash_{TF} B \ \& \ \vdash_{TF} C \Leftrightarrow \vdash_{C(1)} \theta(B) \ \& \ \vdash_{C(1)} \theta(C) \Leftrightarrow \vdash_{C(1)} \theta(B) \wedge \theta(C) \Leftrightarrow \vdash_{C(1)} \theta(B \wedge C)$ ;
7.  $\vdash_{TF} B \vee C \Leftrightarrow \vdash_{C(1)} \theta(B \vee C)$  – доказывается аналогично, используется соответствие  $B \vee C \Leftrightarrow \neg(\neg B \wedge \neg C)$ ;
8.  $\vdash_{TF} B \supset C \Leftrightarrow \vdash_{C(1)} \theta(B \supset C)$  – доказывается аналогично, используется соответствие  $B \supset C \Leftrightarrow \neg B \vee C$ ;
9.  $\vdash_{TF} B \equiv C \Leftrightarrow \vdash_{C(1)} \theta(B \equiv C)$  – доказывается аналогично, используется соответствие  $B \equiv C \Leftrightarrow (B \supset C \wedge C \supset B)$ ;
10. индукцией по пунктам определения ППФ показано, что  $\vdash_{TF} A \Leftrightarrow \vdash_{C(1)} \theta(A)$  для любой ППФ языка теории TF.

**Следствие из теоремы 5.4.**  $C_{(1)}$  и TF – дефинициально эквивалентны.

В [Смирнов 2001, с. 393] предложено усилить понятие погружаемости и введено понятие рекурсивной вложимости теорий друг в друга.  $T_1$  рекурсивно вложима в  $T_2$  е.т.е. существуют функции  $\theta$  и  $\psi$  такие, что

1.  $\vdash_{T_1} A \Rightarrow \vdash_{T_2} \theta(A)$ ;
2.  $\vdash_{T_2} A \Rightarrow \vdash_{T_1} \psi(A)$ ;
3.  $\vdash_{T_1} A \equiv \psi(\theta(A))$ .

В связи с этим, результат леммы 5.3 можно усилить.

**Теорема 5.5.** TF – рекурсивно вложима в  $C_{(1)}$ .

2.  $\vdash_{TF} A \Rightarrow \vdash_{C(1)} \theta(A)$  – из леммы 5.3;
3.  $\vdash_{C(1)} A \Rightarrow \vdash_{TF} \psi(A)$  – из леммы 5.2;
4. Остается доказать, что  $\vdash_{TF} A \equiv \psi(\theta(A))$ :
  1.  $t \equiv \psi(\theta(t)) \Leftrightarrow t \equiv \psi(SaP) \Leftrightarrow t \equiv t$ ;
  2.  $f \equiv \psi(\theta(f)) \Leftrightarrow f \equiv \psi(SeP) \Leftrightarrow f \equiv f$ ;
  3. допустим, что для  $B$  и  $C$  утверждение доказано;
  4.  $\vdash_{TF} B \equiv \psi(\theta(B)) \Leftrightarrow \vdash_{TF} \neg B \equiv \neg \psi(\theta(B)) \Leftrightarrow \vdash_{TF} \neg B \equiv \psi(\neg \theta(B)) \Leftrightarrow \vdash_{TF} \neg B \equiv \psi(\theta(\neg B))$ ;
  5.  $\vdash_{TF} B \wedge C \equiv \psi(\theta(B)) \wedge \psi(\theta(C)) \Leftrightarrow \vdash_{TF} B \wedge C \equiv \psi(\theta(B) \wedge \theta(C)) \Leftrightarrow \vdash_{TF} B \wedge C \equiv \psi(\theta(B \wedge C))$ ;
  6. для случаев, когда  $A$  есть  $B \vee C$ ,  $B \supset C$  или  $B \equiv C$ , доказывается аналогично;
  7. индукцией по пунктам определения ППФ показано, что  $\vdash_{TF} A \equiv \psi(\theta(A))$  для любой ППФ языка теории TF;
5. TF – рекурсивно вложима в  $C_{(1)}$  – на основании 1, 2 и 3.7 и определения рекурсивной вложимости.

## 6. Схема доказательства семантической адекватности

Зафиксируем следующие утверждения:

**6.1.**  $\Phi C \subset C_4 \subset C_- \subset C(2) \subset C_{(1)}$  – по построению.

**6.2.**  $\Phi C$  адекватна описанной выше семантике – см. [Маркин 1991, С. 20-25].

**6.3.**  $C_4$  адекватна семантике  $\Phi C$  с дополнительным условием  $\forall S(\varphi(S) \neq \emptyset)$ .

**6.4.**  $C_-$  адекватна семантике  $C_4$  с дополнительным условием  $\forall S \forall P(\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \emptyset \Rightarrow \varphi(S) = \varphi(P))$ .

**6.5.**  $C(2)$  адекватна семантике  $C_{=}$  с дополнительным условием  $\forall S \forall P \forall Q (\varphi(S) = \varphi(P) \vee \varphi(S) = \varphi(Q) \vee \varphi(P) = \varphi(Q))$ .

**6.6.**  $C_{(1)}$  адекватна семантике  $C_{=}$  с дополнительным условием  $\forall S \forall P (\varphi(S) = \varphi(P))$ .

Для доказательства утверждений 6.3-6.6 достаточно показать, что

1. формулы  $(SaP \supset SiP)$ ,  $(SiP \supset SaP)$ ,  $(SeM \wedge MeP \supset SaP)$  и  $SaP$  общезначимы в соответствующих семантиках (семантическая непротиворечивость);
2. формулы, ставшие общезначимыми благодаря условиям  $\forall S (\varphi(S) \neq \emptyset)$ ,  $\forall S \forall P (\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \emptyset \Rightarrow \varphi(S) = \varphi(P))$ ,  $\forall S \forall P \forall Q (\varphi(S) = \varphi(P) \vee \varphi(S) = \varphi(Q) \vee \varphi(P) = \varphi(Q))$ ,  $\forall S \forall P (\varphi(S) = \varphi(P))$ , доказуемы в соответствующих системах (семантическая полнота).

Итак, имеется ряд последовательно расширяющихся теорий  $T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \dots$ ; для  $T_0$  – минимальной теории этого ряда – построена семантика и доказана ее адекватность (непротиворечивость и полнота  $T_0$  относительно этой семантики). Семантика для  $T_1$  получается добавлением к адекватной  $T_0$  семантике некоторого условия  $I_1$ , семантика для  $T_2$  – добавлением к семантике для  $T_1$  условия  $I_2$  и т.д. (обозначу:  $M_1 = M_0 + I_1$ ,  $M_2 = M_1 + I_2$ , ...). Сперва доказывается непротиворечивость теорий  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ , ... относительно соответствующих семантик. Доказательство семантической полноты систем этого ряда проводится последовательно, начиная с  $T_1$ , и строится по следующей схеме.

**Схема доказательства:**

1.  $T_0 \subset T_1$  – теорема;
2.  $\forall A (T_0 \vdash A \Leftrightarrow M_0 \models A)$  – теорема;
3.  $M_1 = M_0 + I_1$  – по построению;
4.  $M_1 \models A$  – посылка;
5.  $M_0 + I_1 \models A$  – из 3, 4;
6.  $M_0 + (I_1^1 \ \& \ I_1^2 \ \& \ \dots \ \& \ I_1^k) \models A$  – из 5, где  $I_1^1, I_1^2, \dots, I_1^k$  – все возможные формулы метаязыка, полученные из  $I_1$  снятием кванторов по терминам формулы  $A$ ;
7.  $M_0 \models V_1 \wedge V_2 \wedge \dots \wedge V_k \supset A$  – из 6, где каждое  $V_i$  – формула силлогистического языка, полученная из  $I_1^i$  путем эквивалентных преобразований по правилам интерпретации, и  $T_1 \vdash V_i$ ;
8.  $T_0 \vdash V_1 \wedge V_2 \wedge \dots \wedge V_k \supset A$  – из 2, 7;
9.  $T_1 \vdash V_1 \wedge V_2 \wedge \dots \wedge V_k \supset A$  – из 1, 8;
10.  $T_1 \vdash V_1, V_2, \dots, V_k$  – условие подбора  $V_1, V_2, \dots, V_k$ ;
11.  $T_1 \vdash V_1 \wedge V_2 \wedge \dots \wedge V_k$  – из 10, КЛВ;
12.  $T_1 \vdash A$  – из 11, 9 по m.p.;
13.  $M_1 \models A \Rightarrow T_1 \vdash A$  – из 12, введение импликации, шаги 4-12 исключены;
14.  $\forall A (M_1 \models A \Rightarrow T_1 \vdash A)$  – из 13, введение квантора общности.

Семантическая полнота доказана. Если доказана семантическая непротиворечивость  $T_1$ , то имеем семантическую адекватность  $T_1$  относительно рассматриваемой семантики (т.е.  $\forall A (M_1 \models A \Leftrightarrow T_1 \vdash A)$ ) и можем переходить к доказательству семантической полноты следующей системы рассматриваемого ряда.

## 7. Семантическая непротиворечивость $C4$ , $C_{=}$ , $C(2)$ и $C_{(1)}$

Теория  $T$  – непротиворечива относительно некоторой семантики ( $M_T$ ) е.т.е.  $\forall A (T \vdash A \Rightarrow M_T \models A)$ . Каждая теорема является либо аксиомой, либо получена из аксиом по правилам вывода. Поэтому для доказательства семантической непротиворечивости некоторой теории (заданной аксиоматическим исчислением) необходимо и достаточно показать (1) общезначимость в семантике всех аксиом исчисления и (2) неизменность

общезначимости относительно правил вывода. Поскольку я задаю каждую новую теорию  $T_{i+1}$  ряда  $T_0, T_1, T_2, \dots$  добавлением к определению предыдущей теории  $T_i$  некоторой новой аксиомы, для формулировки  $T_i$  уже показаны (1) и (2) и семантика для  $T_{i+1}$  строится на базе семантики для  $T_i$ , то для  $T_i$  критерий (2) можно считать уже доказанным, а критерий (1) будет доказан после доказательства общезначимости вновь добавленной аксиомы в семантике для  $T_{i+1}$ .

Доказательство общезначимости формул  $(SaP \supset SiP)$ ,  $(SiP \supset SaP)$ ,  $(SeM \wedge MeP \supset SaP)$  и  $SaP$  тривиально проводится методом рассуждения от противного.

**Лемма 7.1.**  $M_{C4} \models (SaP \supset SiP)$ .

1.  $\sim(M_{C4} \models (SaP \supset SiP))$  – посылка;
2.  $|SaP \supset SiP| \neq 1$  – из 1;
3.  $|SaP|=1$  &  $|SiP| \neq 1$  – из 2;
4.  $|SaP|=1$  – из 3;
5.  $|SiP| \neq 1$  – из 3;
6.  $\varphi(S) \subseteq \varphi(P)$  – из 4 по условию истинности для A;
7.  $\varphi(S) \neq \emptyset$  – по семантическому условию;
8.  $\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \emptyset$  – из 6, 7;
9.  $|SiP|=1$  – из 8 по условию истинности для I;
10.  $M_{C4} \models (SaP \supset SiP)$  – из 5, 9 по введению отрицания и снятию двойного отрицания; шаги 1-9 исключены из вывода.

**Лемма 7.2.**  $M_{C=} \models (SiP \supset SaP)$ .

1.  $\sim(M_{C=} \models (SiP \supset SaP))$  – посылка;
2.  $|SiP \supset SaP| \neq 1$  – из 1;
3.  $|SiP|=1$  &  $|SaP| \neq 1$  – из 2;
4.  $|SiP|=1$  – из 3;
5.  $|SaP| \neq 1$  – из 3;
6.  $\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \emptyset$  – из 4 по условию истинности для I;
7.  $\varphi(S) = \varphi(P)$  – из 6 по семантическому условию для  $C_ =$  и т.р.;
8.  $\varphi(S) \subseteq \varphi(P)$  – из 7;
9.  $|SaP|=1$  – из 8 по условию истинности для A;
10.  $M_{C=} \models (SiP \supset SaP)$  – из 5, 9 по введению отрицания и снятию двойного отрицания; шаги 1-9 исключены из вывода.

**Лемма 7.3.**  $M_{C(2)} \models (SeM \wedge MeP \supset SaP)$ .

1.  $\sim(M_{C(2)} \models (SeM \wedge MeP \supset SaP))$  – посылка;
2.  $|SeM \wedge MeP \supset SaP| \neq 1$  – из 1;
3.  $|SeM \wedge MeP|=1$  &  $|SaP| \neq 1$  – из 2;
4.  $|SeM \wedge MeP|=1$  – из 3;
5.  $|SaP| \neq 1$  – из 3;
6.  $|SeM|=1$  &  $|MeP|=1$  – из 4;
7.  $|SeM|=1$  – из 6;
8.  $|MeP|=1$  – из 6;
9.  $\varphi(S) \cap \varphi(P) = \emptyset$  – из 7 по условию истинности для E;
10.  $\varphi(S) \cap \varphi(P) = \emptyset$  – из 8 по условию истинности для E;
11.  $\varphi(S) \neq \varphi(M)$  – из 9 и условию о непустоте терминов;
12.  $\varphi(M) \neq \varphi(P)$  – из 10 и условию о непустоте терминов;

13.  $\varphi(S)=\varphi(P)$  – из 11, 12 и семантического условия для  $C(2)$ ;
14.  $\varphi(S)\subseteq\varphi(P)$  – из 13;
15.  $|\text{SaP}|=1$  – из 14 по условию истинности для  $A$ ;
16.  $M_{C(2)} \models (\text{SeM}\wedge\text{MeP}\supset\text{SaP})$  – из 5, 15 по введению отрицания и снятию двойного отрицания; шаги 1-15 исключены из вывода.

**Лемма 7.4.**  $M_{C(1)} \models \text{SaP}$ .

1.  $\sim(M_{C(1)} \models \text{SaP})$  – посылка;
2.  $|\text{SaP}|\neq 1$  – из 1;
3.  $\sim(\varphi(S)\subseteq\varphi(P))$  – из 2;
4.  $\forall S\forall P(\varphi(S)=\varphi(P))$  – семантическое условие;
5.  $\varphi(S)=\varphi(P)$  – из 4;
6.  $\varphi(S)\subseteq\varphi(P)$  – из 5;
7.  $M_{C(1)} \models \text{SaP}$  – из 3, 6, введение отрицания, снятие двойного отрицания; шаги 1-15 исключены из вывода.

**Теорема 7.1.**  $\forall A(C4 \vdash A \Rightarrow M_{C4} \models A)$ .

1.  $\forall A(\Phi C \vdash A \Rightarrow M_{\Phi C} \models A)$  – по утверждению 6.2;
2.  $C4=\Phi C+(\text{SaP}\supset\text{SiP})$  – теорема;
3. всякая аксиома  $C4$  общезначима в семантике  $M_{C4}$  – из 1, 2 и леммы 7.1;
4. все правила вывода  $C4$  сохраняют общезначимость – из 1;
5.  $\forall A(C4 \vdash A \Rightarrow M_{C4} \models A)$  – из 3, 4, по критериям (1) и (2).

**Теорема 7.2.**  $\forall A(C_{=} \vdash A \Rightarrow M_{C_{=}} \models A)$ .

1.  $\forall A(C4 \vdash A \Rightarrow M_{C4} \models A)$  – теорема 7.1;
2.  $C_{=}=C4+(\text{SiP}\supset\text{SaP})$  – по построению;
3. всякая аксиома  $C_{=}$  общезначима в семантике  $M_{C_{=}}$  – из 1, 2 и леммы 7.2;
4. все правила вывода  $C_{=}$  сохраняют общезначимость – из 1;
5.  $\forall A(C_{=} \vdash A \Rightarrow M_{C_{=}} \models A)$  – из 3, 4, по критериям (1) и (2).

**Теорема 7.3.**  $\forall A(C(2) \vdash A \Rightarrow M_{C(2)} \models A)$ .

1.  $\forall A(C_{=} \vdash A \Rightarrow M_{C_{=}} \models A)$  – теорема 7.2;
2.  $C(2)=C_{=}+(\text{SeM}\wedge\text{MeP}\supset\text{SaP})$  – теорема;
3. всякая аксиома  $C(2)$  общезначима в семантике  $M_{C(2)}$  – из 1, 2 и леммы 7.3;
4. все правила вывода  $C(2)$  сохраняют общезначимость – из 1;
5.  $\forall A(C(2) \vdash A \Rightarrow M_{C(2)} \models A)$  – из 3, 4, по критериям (1) и (2).

**Теорема 7.4.**  $\forall A(C(1) \vdash A \Rightarrow M_{C(1)} \models A)$ .

1.  $\forall A(C_{=} \vdash A \Rightarrow M_{C_{=}} \models A)$  – теорема 7.2;
2.  $C(1)=C_{=}+\text{SaP}$  – теорема;
3. всякая аксиома  $C(1)$  общезначима в семантике  $M_{C(1)}$  – из 1, 2 и леммы 7.4;
4. все правила вывода  $C(1)$  сохраняют общезначимость – из 1;
5.  $\forall A(C(1) \vdash A \Rightarrow M_{C(1)} \models A)$  – из 3, 4, по критериям (1) и (2).

## 8. Семантическая полнота и семантическая адекватность $C4$ , $C_{=}$ , $C(2)$ и $C(1)$

Для упрощения доказательства некоторых теорем, сформулирую ряд лемм.

**Лемма 8.1.**  $\forall S(\varphi(S)\neq\emptyset), \varphi(S)\subseteq\varphi(P) \vdash \varphi(S)\cap\varphi(P)\neq\emptyset$ .

Утверждение леммы очевидно для классической теории множеств.

**Лемма 8.2.**  $\forall S(\varphi(S) \neq \emptyset), \forall S \forall P(\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \emptyset \Rightarrow \varphi(S) = \varphi(P)) \vdash (\varphi(S) = \varphi(P) \Leftrightarrow \varphi(S) \subseteq \varphi(P))$ .

1.  $\forall S(\varphi(S) \neq \emptyset)$  – условие;
2.  $\forall S \forall P(\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \emptyset \Rightarrow \varphi(S) = \varphi(P))$  – условие;
3.  $\varphi(S) = \varphi(P) \Leftrightarrow \varphi(S) \subseteq \varphi(P) \ \& \ \varphi(P) \subseteq \varphi(S)$  – соотношение = и  $\subseteq$ ;
4.  $\varphi(S) = \varphi(P) \Rightarrow \varphi(S) \subseteq \varphi(P)$  – из 2;
5.  $(\forall S(\varphi(S) \neq \emptyset) \ \& \ \varphi(S) \subseteq \varphi(P)) \Rightarrow \varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \emptyset$  – по лемме 8.1;
6.  $\forall S(\varphi(S) \neq \emptyset) \Rightarrow (\varphi(S) \subseteq \varphi(P) \Rightarrow \varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \emptyset)$  – из 5, КЛВ;
7.  $\varphi(S) \subseteq \varphi(P) \Rightarrow \varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \emptyset$  – из 1, 6, т.р.;
8.  $\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \emptyset \Rightarrow \varphi(S) = \varphi(P)$  – из 2, снятие кванторов общности по S и P;
9.  $\varphi(S) \subseteq \varphi(P) \Rightarrow \varphi(S) = \varphi(P)$  – из 7, 8, транзитивность импликации;
10.  $\varphi(S) = \varphi(P) \Leftrightarrow \varphi(S) \subseteq \varphi(P)$  – из 4, 9, определение эквиваленции через следование.

**Лемма 8.3.**  $\forall S(\varphi(S) \neq \emptyset), \forall S \forall P(\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \emptyset \Rightarrow \varphi(S) = \varphi(P)) \vdash \varphi(S) \subseteq \varphi(P) \Leftrightarrow \varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \emptyset$ .

Утверждение очевидно из лемм 8.1 и 8.2.

**Теорема 8.1.** C4 – полна относительно семантики  $M_{C4}$ .

1.  $\Phi C \subset C4$  – по утверждению 6.1;
2.  $\forall A(\Phi C \vdash A \Leftrightarrow M_{\Phi C} \models A)$  – утверждение 6.2;
3.  $M_{C4} = M_{\Phi C} + \forall S(\varphi(S) \neq \emptyset)$  – по построению;
4.  $M_{C4} \models A$  – посылка;
5.  $M_{\Phi C} + \forall S(\varphi(S) \neq \emptyset) \models A$  – из 3, 4;
6.  $M_{\Phi C} + \forall S(\varphi(S) \cap \varphi(S) \neq \emptyset) \models A$  – из 5;
7.  $M_{\Phi C} + (\varphi(S_1) \cap \varphi(S_1) \neq \emptyset \ \& \ \varphi(S_2) \cap \varphi(S_2) \neq \emptyset \ \& \ \dots \ \& \ \varphi(S_n) \cap \varphi(S_n) \neq \emptyset) \models A$  – из 6, где  $S_1, S_2, \dots, S_n$  – все термины формулы A;
8.  $M_{\Phi C} \models (S_1 i S_1 \wedge S_2 i S_2 \wedge \dots \wedge S_n i S_n) \supset A$  – из 7;
9.  $\Phi C \vdash (S_1 i S_1 \wedge S_2 i S_2 \wedge \dots \wedge S_n i S_n) \supset A$  – из 8 и 2;
10.  $C4 \vdash (S_1 i S_1 \wedge S_2 i S_2 \wedge \dots \wedge S_n i S_n) \supset A$  – из 9 и 1;
11.  $C4 \vdash S_1 i S_1, S_2 i S_2, \dots, S_n i S_n$  – по определению C4;
12.  $C4 \vdash S_1 i S_1 \wedge S_2 i S_2 \wedge \dots \wedge S_n i S_n$  – из 11, введение конъюнкции;
13.  $C4 \vdash A$  – из 10, 12, т.р.;
14.  $M_{C4} \models A \Rightarrow C4 \vdash A$  – из 13, введение импликации; шаги 4-13 исключены;
15.  $\forall A(M_{C4} \models A \Rightarrow C4 \vdash A)$  – из 14, введение квантора общности.

**Теорема 8.2.**  $\forall A(C4 \vdash A \Leftrightarrow M_{C4} \models A)$ .

Утверждение следует из теорем 7.1 и 8.1.

**Теорема 8.3.**  $C_{=} – полна относительно семантики  $M_{C=}$ .$

1.  $C4 \subset C_{=}$  – по утверждению 6.1;
2.  $\forall A(C4 \vdash A \Leftrightarrow M_{C4} \models A)$  – теорема 8.2;
3.  $M_{C=} = M_{C4} + \forall S \forall P(\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \emptyset \Rightarrow \varphi(S) = \varphi(P))$  – по построению;
4.  $M_{C=} \models A$  – посылка;
5.  $M_{C4} + \forall S \forall P(\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \emptyset \Rightarrow \varphi(S) = \varphi(P)) \models A$  – из 3, 4;
6.  $M_{C4} + \forall S \forall P(\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \emptyset \Rightarrow \varphi(S) \subseteq \varphi(P)) \models A$  – из 5;

7.  $M_{C_4} + (\varphi(S_1) \cap \varphi(S_1) \neq \emptyset \Rightarrow \varphi(S_1) \subseteq \varphi(S_1) \ \& \ \varphi(S_1) \cap \varphi(S_2) \neq \emptyset \Rightarrow \varphi(S_1) \subseteq \varphi(S_2) \ \& \ \dots \ \& \ \varphi(S_n) \cap \varphi(S_n) \neq \emptyset \Rightarrow \varphi(S_n) \subseteq \varphi(S_n)) \models A$  – из 6, где  $S_1, S_2, \dots, S_n$  – все термины формулы  $A$ ;
8.  $M_{C_4} \models (S_1 i S_1 \supset S_1 a S_1 \wedge S_1 i S_2 \supset S_1 a S_2 \wedge \dots \wedge S_n i S_n \supset S_n a S_n) \supset A$  – из 7;
9.  $C_4 \vdash (S_1 i S_1 \supset S_1 a S_1 \wedge S_1 i S_2 \supset S_1 a S_2 \wedge \dots \wedge S_n i S_n \supset S_n a S_n) \supset A$  – из 8, 2;
10.  $C_{=} \vdash (S_1 i S_1 \supset S_1 a S_1 \wedge S_1 i S_2 \supset S_1 a S_2 \wedge \dots \wedge S_n i S_n \supset S_n a S_n) \supset A$  – из 9, 1;
11.  $C_{=} \vdash S_1 i S_1 \supset S_1 a S_1, S_1 i S_2 \supset S_1 a S_2, \dots, S_n i S_n \supset S_n a S_n$  – по определению  $C_{=}$ ;
12.  $C_{=} \vdash S_1 i S_1 \supset S_1 a S_1 \wedge S_1 i S_2 \supset S_1 a S_2 \wedge \dots \wedge S_n i S_n \supset S_n a S_n$  – из 11, введение конъюнкции;
13.  $C_{=} \vdash A$  – из 10, 12 по т.р.;
14.  $M_{C_{=}} \models A \Rightarrow C_{=} \vdash A$  – из 13, введение импликации; шаги 4-13 исключены;
15.  $\forall A (M_{C_{=}} \models A \Rightarrow C_{=} \vdash A)$  – из 14, введение квантора общности.

**Теорема 8.4.**  $\forall A (C_{=} \vdash A \Leftrightarrow M_{C_{=}} \models A)$ .

Утверждение следует из теорем 7.2 и 8.3.

**Теорема 8.5.**  $C(2)$  – полна относительно семантики  $M_{C(2)}$ .

1.  $C_{=} \subset C(2)$  – по утверждению 6.1;
2.  $\forall A (C_{=} \vdash A \Leftrightarrow M_{C_{=}} \models A)$  – теорема 8.4;
3.  $M_{C(2)} = M_{C_{=}} + \forall S \forall P \forall Q (\varphi(S) = \varphi(P) \vee \varphi(S) = \varphi(Q) \vee \varphi(P) = \varphi(Q))$  – по построению;
4.  $M_{C_{=}} \models A$  – посылка;
5.  $M_{C_{=}} + \forall S \forall P \forall Q (\varphi(S) = \varphi(P) \vee \varphi(S) = \varphi(Q) \vee \varphi(P) = \varphi(Q)) \models A$  – из 3, 4;
6.  $M_{C_{=}} + \forall S \forall P \forall Q (\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \emptyset \vee \varphi(S) \cap \varphi(Q) \neq \emptyset \vee \varphi(P) \subseteq \varphi(Q)) \models A$  – из 5, подстановка эквивалентного, леммы 8.2 и 8.3;
7.  $M_{C_{=}} + \forall S \forall P \forall Q (\sim(\varphi(S) \cap \varphi(P) = \emptyset \ \& \ \varphi(S) \cap \varphi(Q) = \emptyset) \vee \varphi(P) \subseteq \varphi(Q)) \models A$  – из 6, правило де Моргана, снятие двойного отрицания;
8.  $M_{C_{=}} + \forall S \forall P \forall Q ((\varphi(S) \cap \varphi(P) = \emptyset \ \& \ \varphi(S) \cap \varphi(Q) = \emptyset) \Rightarrow \varphi(P) \subseteq \varphi(Q)) \models A$  – из 7, КЛВ;
9.  $M_{C_{=}} + ((\varphi(S_1) \cap \varphi(S_1) = \emptyset \ \& \ \varphi(S_1) \cap \varphi(S_1) = \emptyset) \Rightarrow \varphi(S_1) \subseteq \varphi(S_1)) \ \& \ (\varphi(S_1) \cap \varphi(S_1) = \emptyset \ \& \ \varphi(S_1) \cap \varphi(S_2) = \emptyset) \Rightarrow \varphi(S_1) \subseteq \varphi(S_2)) \ \& \ \dots \ \& \ (\varphi(S_n) \cap \varphi(S_n) = \emptyset \ \& \ \varphi(S_n) \cap \varphi(S_n) = \emptyset) \Rightarrow \varphi(S_n) \subseteq \varphi(S_n)) \models A$  – из 8, где  $S_1, S_2, \dots, S_n$  – все термины формулы  $A$ ;
10.  $M_{C_{=}} \models ((S_1 e S_1 \wedge S_1 e S_1 \supset S_1 a S_1) \wedge (S_1 e S_1 \wedge S_1 e S_2 \supset S_1 a S_2) \wedge \dots \wedge (S_n e S_n \wedge S_n e S_n \supset S_n a S_n)) \supset A$  – из 9;
11.  $C_{=} \vdash ((S_1 e S_1 \wedge S_1 e S_1 \supset S_1 a S_1) \wedge (S_1 e S_1 \wedge S_1 e S_2 \supset S_1 a S_2) \wedge \dots \wedge (S_n e S_n \wedge S_n e S_n \supset S_n a S_n)) \supset A$  – из 10, 2;
12.  $C(2) \vdash ((S_1 e S_1 \wedge S_1 e S_1 \supset S_1 a S_1) \wedge (S_1 e S_1 \wedge S_1 e S_2 \supset S_1 a S_2) \wedge \dots \wedge (S_n e S_n \wedge S_n e S_n \supset S_n a S_n)) \supset A$  – из 11, 1;
13.  $C(2) \vdash (S_1 e S_1 \wedge S_1 e S_1 \supset S_1 a S_1), (S_1 e S_1 \wedge S_1 e S_2 \supset S_1 a S_2), \dots, (S_n e S_n \wedge S_n e S_n \supset S_n a S_n)$  – по определению  $C_{=}$ ;
14.  $C(2) \vdash ((S_1 e S_1 \wedge S_1 e S_1 \supset S_1 a S_1) \wedge (S_1 e S_1 \wedge S_1 e S_2 \supset S_1 a S_2) \wedge \dots \wedge (S_n e S_n \wedge S_n e S_n \supset S_n a S_n))$  – из 13, введение конъюнкции;
15.  $C(2) \vdash A$  – из 12, 14 по т.р.;
16.  $M_{C(2)} \models A \Rightarrow C(2) \vdash A$  – из 15, введение импликации; шаги 4-15 исключены;
17.  $\forall A (M_{C(2)} \models A \Rightarrow C(2) \vdash A)$  – из 16, введение квантора общности.

**Теорема 8.6.**  $\forall A (C(2) \vdash A \Leftrightarrow M_{C(2)} \models A)$ .

Утверждение следует из теорем 7.3 и 8.5.

**Теорема 8.7.** Полнота  $C(1)$  – полна относительно семантики  $M_{C(1)}$ .

1.  $C_{=} \subset C(1)$  – по утверждению 6.1;

2.  $\forall A(C_{=} \vdash A \Leftrightarrow M_{C_{=}} \models A)$  – теорема 8.6;
3.  $M_{C_{(2)}} = M_{C_{=}} + \forall S \forall P(\varphi(S) = \varphi(P))$  – по построению;
4.  $M_{C_{=}} \models A$  – посылка;
5.  $M_{C_{=}} + \forall S \forall P(\varphi(S) = \varphi(P)) \models A$  – из 3, 4;
6.  $M_{C_{=}} + \forall S \forall P(\varphi(S) \subseteq \varphi(P)) \models A$  – из 5, подстановка эквивалентного, лемма 8.2;
7.  $M_{C_{=}} + (\varphi(S_1) \subseteq \varphi(S_1) \& \varphi(S_1) \subseteq \varphi(S_2) \& \dots \& \varphi(S_n) \subseteq \varphi(S_n)) \models A$  – из 6, где  $S_1, S_2, \dots, S_n$  – все термины формулы  $A$ ;
8.  $M_{C_{=}} \models (S_1 a S_1 \wedge S_1 a S_2 \wedge \dots \wedge S_n a S_n) \supset A$  – из 7;
9.  $C_{=} \vdash (S_1 a S_1 \wedge S_1 a S_2 \wedge \dots \wedge S_n a S_n) \supset A$  – из 8, 2;
10.  $C_{(1)} \vdash (S_1 a S_1 \wedge S_1 a S_2 \wedge \dots \wedge S_n a S_n) \supset A$  – из 9, 1;
11.  $C_{(1)} \vdash S_1 a S_1, S_1 a S_2, \dots, S_n a S_n$  – по определению  $C_{(1)}$ ;
12.  $C_{(1)} \vdash (S_1 a S_1 \wedge S_1 a S_2 \wedge \dots \wedge S_n a S_n)$  – из 11, введение конъюнкции;
13.  $C_{(1)} \vdash A$  – из 10, 12 по m.p.;
14.  $M_{C_{(1)}} \models A \Rightarrow C_{(1)} \vdash A$  – из 13, введение импликации; шаги 4-13 исключены;
15.  $\forall A(M_{C_{(1)}} \models A \Rightarrow C_{(1)} \vdash A)$  – из 14, введение квантора общности.

**Теорема 8.8.**  $\forall A(C_{(1)} \vdash A \Leftrightarrow M_{C_{(1)}} \models A)$ .

Утверждение следует из теорем 7.4 и 8.7.

## 9. Построение счетного класса расширений $C_{=}$

Рассматриваемый класс теорий порождается рядом последовательных ослаблений аксиомы  $SaP^{18}$ . Ослабления происходят по закону классической логики  $A \Rightarrow (B \vee A)$ . Вот рекурсивное определение этого ряда:

$$A_1 = S_1 a S_2;$$

...

$A_{n+1} = S_1 a S_{n+2} \vee S_2 a S_{n+2} \vee \dots \vee S_{n+1} a S_{n+2} \vee A_n$ , где  $S_1, S_2, \dots, S_{n+1}$  – список всех терминов, входящих в  $A_n$ , и  $S_{n+2}$  – термин, не входящий в  $A_n$ ;

...

Каждая теория  $C_{(i)}$  порожденного класса есть  $(C_{=} + A_i)$ . Иначе говоря, рассматриваемый класс есть множество  $\{C_{(i)} / C_{(i)} = C_{=} + A_i\}$ .

Для  $n=2$  получаем:  $S_1 a S_3 \vee S_2 a S_3 \vee S_1 a S_2 \Leftrightarrow \neg(S_1 e S_3) \vee \neg(S_3 e S_2) \vee S_1 a S_2 \Leftrightarrow (S_1 e S_3 \wedge S_3 e S_2) \supset S_1 a S_2 \Leftrightarrow SeM \wedge MeP \supset SaP$ , т.е. рассмотренная выше теория  $C_{(2)}$  есть  $C_{(2)}$ .

Семантику для каждой теории  $C_{(i)}$  получаем присоединением к семантике адекватной  $C_{=}$  дополнительного семантического условия  $I_i$ . Для  $C_{=}$  имеет место следующая эквивалентность:  $|SaP|=1 \Leftrightarrow \varphi(S) \subseteq \varphi(P) \Leftrightarrow \varphi(S) = \varphi(P)$  (лемма 8.2).  $I_i$  получаем из характеристической аксиомы  $A_i$  путем эквивалентных преобразований с последующим введением кванторов общности по всем терминам  $S_1, S_2, \dots, S_{i+1}$  полученной формулы. Если  $A_i = S_1 a S_{i+1} \vee S_2 a S_{i+1} \vee \dots \vee S_i a S_{i+1} \vee S_1 a S_i \vee \dots \vee S_1 a S_2$ , то (по определению  $\varphi$  и лемме 8.2) получаем:

<sup>18</sup> Идея навеяна результатом А. Роуза [Rose 1956] об аксиоматизации импликативных фрагментов  $n$ -значных логик Лукасевича ( $L_{n \rightarrow}$ ). К аксиоматизации импликативного фрагмента бесконечнозначной логики Лукасевича ( $L_{\omega \rightarrow}$ ) добавляется закон Пирса:  $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ , в результате чего получаем импликативный фрагмент классики (= импликативному фрагменту 2-значной логики Лукасевича). Далее последовательно ослабляем закон Пирса, подставляя в имеющуюся формулу  $(p \rightarrow q)$  вместо  $q$ . Т.е.,  $L_{2 \rightarrow} = L_{\omega \rightarrow} + (((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p)$ ,  $L_{3 \rightarrow} = L_{\omega \rightarrow} + (((p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow p) \rightarrow p)$  и т.д. (см. [Карпенко 1997]).

$$|S_1aS_{i+1} \vee S_2aS_{i+1} \vee \dots \vee S_iaS_{i+1} \vee S_1aS_i \vee \dots \vee S_1aS_2| = 1 \Leftrightarrow (\varphi(S_1) = \varphi(S_{i+1}) \vee \varphi(S_2) = \varphi(S_{i+1}) \vee \dots \vee \varphi(S_i) = \varphi(S_{i+1}) \vee \varphi(S_1) = \varphi(S_i) \vee \dots \vee \varphi(S_1) = \varphi(S_2)).$$

Отсюда имеем:

$$\vdash (S_1aS_{i+1} \vee S_2aS_{i+1} \vee \dots \vee S_iaS_{i+1} \vee S_1aS_i \vee \dots \vee S_1aS_2) \Leftrightarrow \forall S_1 \forall S_2 \dots \forall S_{i+1} (\varphi(S_1) = \varphi(S_{i+1}) \vee \varphi(S_2) = \varphi(S_{i+1}) \vee \dots \vee \varphi(S_i) = \varphi(S_{i+1}) \vee \varphi(S_1) = \varphi(S_i) \vee \dots \vee \varphi(S_1) = \varphi(S_2)).$$

Для  $i=1$  и  $i=2$  (теории  $C_{(1)}$  и  $C(2)$ ) семантическая адекватность была доказана выше.

Формула  $I_n$  говорит, что для любых  $n+1$  терминов теории  $C_{(n)}$  объемы по крайней мере двух терминов совпадают; иначе: модель теории содержит не более  $n$  объектов, которые можно приписывать в качестве значений терминам этой теории. Условие  $\forall S \forall P (\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \emptyset \Rightarrow \varphi(S) = \varphi(P))$  (при наличии  $\forall S (\varphi(S) \neq \emptyset)$ ) естественно понимать как требование единичности объемов всех терминов теории, а  $I_n$  – как требование, чтобы предметная область содержала не более  $n$  объектов.

Добавляя  $SaP$  к формулировкам более слабых теорий, чем  $C_{=}$ , ( $C4$ ,  $C2$ ,  $C3$ ,  $C1$ , ...), видимо, можно получать другие счетные классы теорий с супремумом в  $C_{(1)}$ .

## 10. Заключение

В работе решен ряд поставленных ранее задач и вопросов.

1. Построена единая структурная систематизация по дедуктивной силе всех найденных мной в литературе силлогистик в рассматривавшемся языке. Причем, в систематизации учтены и теории, формулировавшиеся с дополнительными правилами вывода.
2. Найдено синтаксически полное расширение теории  $C4$  (теория  $C_{(1)}$ ).
3. Построены адекватные семантики для  $C_{=}$ ,  $C(2)$  и  $C_{(1)}$ .
4. Показано существование (в рассматривавшемся языке) по крайней мере счетного числа формальных силлогистик (теорий, имеющих силлогистические семантики стандартного вида).

Ряд вопросов по-прежнему остается не решенным.

1. Не определено точное расстояние<sup>19</sup> между теориями графа 3. Особенно интересен вопрос о расстоянии между теорией  $C4$  и ее подтеориями  $C2$ ,  $FC$ ,  $BC$  и  $KC$ .
2. Не исследовано выдвинутое в [Шиян 2000] предположение, что  $C$ ,  $C0$ ,  $C0.1$ - $C0.4$ ,  $C\phi1$  и  $C\phi2$  являются инфинумами соответствующих множеств теорий (из таблицы 1).
3. Совершенно не исследован вопрос (не затрагивавшийся в данной работе) об окрестностной структуре<sup>20</sup> множества теорий в данном языке. Так, например, в  $SaS$ -окрестность  $C4$  входят теории  $C1$ ,  $C2$ ,  $C3$ ,  $C3.1$ ,  $KC$  и  $BC$ , а в  $SiS$ -окрестность  $C4$  входят только  $C2$ ,  $KC$  и  $BC$ . В [Шиян 2000] были выдвинуты гипотезы, что инфинум  $SaS$ -окрестности  $C4$  находится между  $C$  и  $C_0$ , а инфинум  $SiS$ -окрестности  $C4$  находится между  $C_0$  и  $C_{0.1}$ . Но поиск соответствующих теорий пока не был осуществлен. Интересен также вопрос о мощности той или иной окрестности, в частности о мощностях  $SiS$ - и  $SaS$ -окрестностей  $C4$ .

Остается без ответа и целый ряд других вопросов.

<sup>19</sup> Расстояние между двумя теориями ( $T_1 \subset T_2$ ) есть мощность множества промежуточных теорий (т.е. мощность множества  $\{T_i / T_1 \subset T_i \text{ и } T_i \subset T_2\}$ ).

<sup>20</sup> В [Шиян 2000] было введено понятие окрестности теории  $T$ , относительно некоторой формулы  $A$  (множество всех формальных теорий, присоединение к которым  $A$  в качестве аксиомы дает теорию  $T$ :  $\{T_i / (T_i + A) = T\}$ ).

Помимо систематизации формальных теорий по дедуктивной силе, мной был предложен метод систематизации по выразительным возможностям [Шиян 2002]. В основе систематизации лежит упорядочение теорий следующим отношением:

**Df.10.1.**  $(T_1 \leq^* T_2) \Leftrightarrow$  выполнен один из критериев, например: (существует операция, погружающая  $T_1$  в  $T_2$  (т.е.  $\exists \varphi \forall A(T_1 \vdash A \Leftrightarrow T_2 \vdash \varphi(A))$ ) или ( $T_1$  дефинициально определима в  $T_2$ ).

Можно сформулировать и другие критерии наличия этого отношения между произвольными теориями  $T_1$  и  $T_2$ .

При этом множество формальных теорий разбивается на классы эквивалентности (взаимопогружаемости, дефинициальной эквивалентности и др.)<sup>21</sup>. В один из таких классов (CS, классическая силлогистика) входят теории C2, C3.1 (=C3<sup>+</sup>), FC, KC, BC [Маркин 1991, Смирнов 1994]. Из силлогистических теорий в других языках в этот класс входят: C2V [Смирнов 1994], FB и BV [Костюк 1999], FY [Ганиянц, Маркин 1997]. C1<sup>+</sup> Маркина входит в один класс с OFC [Маркин 1991]. C4 входит в один класс (TS, традиционная силлогистика) с теориями C4B [Костюк 1999] и Y4 [Ганиянц, Маркин 1997]. C<sub>=</sub> входит в один класс с бескванторной теорией эквивалентности<sup>22</sup>. В один и тот же класс (наименьший относительно данного порядка?) входят теории C<sub>(1)</sub> и TF (результат этой статьи). Пока не исследован вопрос о дедуктивно более слабых теориях.

Если ограничиться только теориями, взятыми из работ других авторов, и наиболее важными из сформулированных мной, то получается следующий предварительный граф. Как и в предыдущих графах, ниже расположены более слабые теории, выше – более сильные, относительно данного порядка, теории. {T} – класс эквивалентности, включающий теорию T<sup>23</sup>.

При этом остается вопрос о размещении на графе:

{C1.1} и {C1<sup>+</sup>1} – где-то между {C1<sup>+</sup>2} и {C1};

{C1.2} – между CS и {C1};

{C0.1}, {C0.2}, {C0.3} – между CS и {C0};

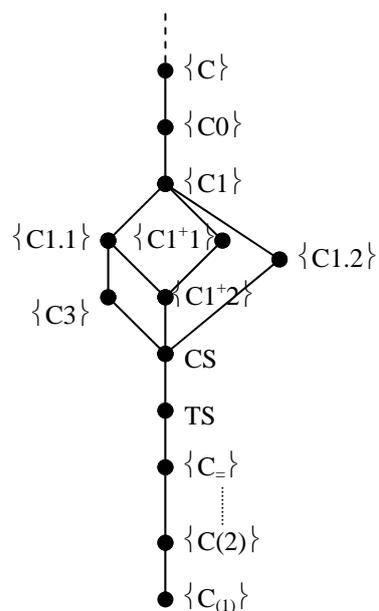
{C0.4} – между {C1} и {C0};

{Cф1}, {Cф2} – между CS и {C}.

C3 – слабее C1<sup>+</sup>2 и, если между ними есть отношение погружаемости, то C1<sup>+</sup>2 погружается в C3, а не наоборот. Это следует из погружаемости C1<sup>+</sup>2 в КЛОП<sup>1</sup> и не погружаемости C3: если бы C3 погружалась в C1<sup>+</sup>2, то она погружалась бы и в КЛОП<sup>1</sup>.

Вообще, C1<sup>+</sup>2 [Маркин 1991] и теории, расположенные ниже, погружаются в КЛОП<sup>1</sup>, а C3, C1<sup>+</sup>1 [Мчедlishvili 1986] и теории, расположенные выше, не погружаются в КЛОП<sup>1</sup>. Вопрос относительно C1.2 остается открытым.

Окончательная систематизация по этому порядку, как и ряд других задач, еще ждет своего решения.



**Граф 4.** Фрагмент интенциональной решетки.

<sup>21</sup> Это отношение эквивалентности означает, что две формальные теории формализуют (задают) один и тот же класс предикатных функций.

<sup>22</sup> Теория на базе классики в языке с бесконечным списком элементарных постоянных термов и предикатом =.

<sup>23</sup> Или класс предикатных функций, задаваемый T.

## Литература<sup>24</sup>

1. [Аккерман, Гильберт 1947] Аккерман В., Гильберт Д. Основы теоретической логики. М.: «Иностранная литература», 1947.
2. [Аристотель 1978] Аристотель. Первая аналитика // Сочинения в четырех томах. Том 2. М.: Мысль, 1978.
3. [Бочаров 1984] Бочаров В.А. Аристотель и традиционная силлогистика. М., 1984.
4. [Бочаров 1986] Бочаров В.А. Эктезис в силлогистике С2 // Философские проблемы истории логики и методологии науки (Материалы к Всесоюзной конференции «Методологические и мировоззренческие проблемы истории философии», секция X). Часть I. М., 1986.
5. [Ганиянц, Маркин 1997] Ганиянц И.И. Маркин В.И. Силлогистики с константой исчерпываемости // Международная конференция "Развитие логики в России: итоги и перспективы". Тезисы докладов и сообщений. М., 1997.
6. [Карпенко 1997] Карпенко А.С. Классификация пропозициональных логик // Логические исследования. Вып. 4. М.: Наука, 1997.
7. [Костюк 1999] Костюк Т.П. Позитивные силлогистики Васильевского типа // Логические исследования. Вып. 6. М.: Наука, 1999.
8. [Кэрролл 1973] Кэрролл Льюис. Символическая логика // Кэрролл Л. История с узелками. М., 1973.
9. [Лукаевич 1959] Лукаевич Я. Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М., 1959.
10. [Маркин 1983] Маркин В.И. Семантическое доказательство погружаемости некоторых систем силлогистики в исчисление предикатов // Логические исследования. М., 1983.
11. [Маркин 1986] Маркин В.И. Аксиоматизация фундаментальной силлогистики Г. Лейбница // Философские проблемы истории логики и методологии науки (Материалы к Всесоюзной конференции «Методологические и мировоззренческие проблемы истории философии», секция X). Часть I. М., 1986.
12. [Маркин 1991] Маркин В.И. Силлогистические теории в современной логике. М., 1991.
13. [Маркин 1998] Маркин В.И. Системы силлогистики, адекватные двум переводам силлогистических формул в исчисление предикатов В.А. Смирнова // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН 1997. М., 1998.
14. [Мчедлишвили 1986] Мчедлишвили Л.И. Позитивная ассерторическая силлогистика и логика одноместных предикатов // Логика и системные методы анализа научного знания. М., 1986.
15. [Мчедлишвили 1999] Мчедлишвили Л.И. К семантике аподиктической силлогистики Аристотеля // Логические исследования. Вып. 6. М.: Наука, 1999.
16. [Попов 1997] Попов В.М. Расширение системы С2 В.А. Смирнова и  $\cap$ -полурешетка с нулем // Международная конференция "Развитие логики в России: итоги и перспективы". Тезисы докладов и сообщений. М., 1997.
17. [Смирнов 1980] Смирнов В.А. Адекватный перевод утверждений силлогистики в исчисление предикатов // Актуальные проблемы логики и методологии науки. Киев, 1980.
18. [Смирнов 1987/2002]<sup>25</sup> Смирнов В.А. Логические методы анализа научного знания. М.: Наука, 1987. М., 2002.

---

<sup>24</sup> Через дробь указывается год переиздания, например: [Смирнов 1987/2002].

<sup>25</sup> Страницы указываются по изданию 2002 года.

19. [Смирнов 1994] Смирнов В.А. Дефинициальная эквивалентность систем силлогистики // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН 1993. М., 1994. Переиздано в [Смирнов 2001].
20. [Смирнов 2001] Логико-философские труды В.А. Смирнова. М.: УРСС, 2001.
21. [Стяжкин 1967] Стяжкин Н.И. Формирование математической логики. М.: Наука, 1967.
22. [Федоров 1980] Федоров Б.И. Логика Бернардо Больцано. Л., 1980.
23. [Шиян 2000] Шиян Т.А. Классификация теорий чистой позитивной силлогистики // Логические Исследования (Logical Studies), №4; www.logic.ru.
24. [Шиян 2001] Шиян Т.А. Классификация силлогистических теорий // Смирновские чтения. 3 Международная конференция. Москва, 2001.
25. [Шиян 2002] Шиян Т.А. Методы классификации формальных теорий и множество силлогистик // Аспекты: Сборник статей по философским проблемам истории и современности. М.: Изд-во «Современные тетради», 2002.
26. [Bernoulli Jac. und Joh. 1685] Bernoulli Jacques et Bernoulli Jean. *Parallelismus ratiocinii logici et algebraici*. Basel, 1685.
27. [Bochenski 1948/1962] Bochenski I.M. On the categorical syllogism. – *Domminican studies*, 1 (1948). Repr. in *Logico-philosophical studies*, ed. A. Menne. Dordrecht, 1962.
28. [Boole 1847/1965] Boole G. *The Mathematical Analysis of Logic*. 1847; N.Y., 1965.
29. [Boole 1854/1953] Boole G. *An investigation of the Laws of Thought, on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*. 1854; N.Y., 1953.
30. [Brentano 1973] Brentano F. *Psychology from an empirical standpoint*, ed. by L.L. McAlister. London, 1973.
31. [De Morgan 1847] De Morgan A. *Formal logic, or the calculus of inference, necessary and probable*. London, 1847.
32. [De Morgan 1860] De Morgan A. *Syllabus of a proposed System of Logic*. 1860.
33. [Peirce 1881] Peirce Ch.S. On the logic of number. – *The American Journal of Mathematics*, t. 4, 1881.
34. [Rose 1956] Rose A. Formalization du calcul propositionnel implicatif a m-valeurs de Lukasiewicz // *Comptes rendud hebdomadaires des seance de l'Academi des Sciences*. 1956. Vol. 243, p.1263-1264.
35. [Tarski 1956] Tarski A. *Foundations of the calculus of system* // *Logic, semantics, metamathematics*. Oxford, 1956.
36. [Venn 1894] Venn J. *Symbolic Logic*. London, 1894.
37. [Whitehead, Russell 1911-1913] Whitehead A.N., Russell B. *Principia mathematica*, vol. 1-3. Cambridge, 1911-1913.